E. VESSIOT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

Professées à l'Université de Lyon,
et rédigées par M. Anzemberger

ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE

Avec une Préface de M. G. KOENIGS
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE J. HERMANN

6, Rue de la Sorbonne, 6

1919

PRÉFACE

Pour présenter au public la première édition, aujourd'hui épuisée, de son livre, M. Vessiot n'a eu besoin de personne. Cette première édition a suffi pour asseoir la réputation de l'ouvrage et la seconde, en raison des améliorations introduites, ne fera que l'assurer encore davantage.

Malgré qu'il ne s'agisse pas ici d'une présentation en forme au public, présentation notoirement inutile, je n'ai pas cru devoir décliner l'offre aimable qu'a bien voulu me faire mon savant collègue et ami, d'écrire ces quelques lignes en tête de son livre. En même temps qu'un témoignage de profonde estime pour le savoir et le talent d'exposition de l'auteur, j'y ai vu l'occasion de mettre en relief le caractère spécial qu'ont revêtu les travaux géométriques dans ces dernières années et de faire sentir la nécessité qu'il y a de diffuser un livre comme celui-ci, qui ouvre l'accès du progrès aux élèves studieux, malheureusement trop rares, que leur goût entraîne vers la Géométrie.

Dans la première partie du dernier siècle, que l'on peut approximativement limiter à l'année 1870, la géométrie a réalisé par les voies les plus diverses et sur les terrains les plus variés d'inestimables conquêtes. Cette période héroïque a vu naître les notions les plus essentielles, elle les a vu aussi se développer et aboutir à de grands problèmes dont la solution, demandée à l'analyse, a provoqué dans cette science sœur un mouvement profond qui s'amplifie chaque jour. Il suffit de citer les grands noms de Monge, de Dupin, de Gauss, de Serret, de Lamé, d'Ossian Bonnet, de Bour, pour évoquer les larges voies ouvertes dans la théorie des surfaces et dans celle des coordonnées curvilignes. Ceux de Poncelet, de Chasles rappellent les premières évocations des grandes lois de correspondance et des transformations, qui devaient, un peu plus tard, trouver dans l'œuvre de Sophus Lie une si magnifique inflorescence. Vers la fin de la même période,

comme couronnement du principe de dualité, entre la géométrie du point et celle du plan, Pluecker plaçait la géométrie de la droite et introduisait d'une façon systématique dans la science les notions de congruence et de complexe sur lesquelles, il faut cependant le reconnaître, longtemps auparavant, Malus, Dupin et Transon avaient, à propos d'optique, produit d'intéressantes considérations et d'importants résultats. Chasles, vers la même époque, avait montré comment la cinématique du corps solide met en œuvre le principe de dualité et, concurremment avec Pluecker, il avait mis la main sur ce que ce dernier appela un complexe linéaire.

Ainsi se sont accumulés, durant cette illustre période, des matériaux de la plus grande valeur dans les ordres les plus divers. Ces grandes idées, nées à l'écart les unes des autres et dont les initiateurs s'ignoraient souvent entre eux, paraissaient destinées à faire isolément leur chemin et à constituer autant de catégories de spécialisations pour les futurs géomètres.

Il appartenait à la dernière partie du XIX^e siècle de démentir ces apparences et d'opérer la merveilleuse fusion de tous ces éléments.

Les grands auteurs de cette fusion auront été, par des moyens différents, Sophus Lie et Darboux. Il serait injuste d'oublier Ribaucour qui a contribué puissamment de son côté à réaliser cette pénétration si féconde des diverses branches de la Géométrie les unes dans les autres et qui, sur des exemples inoubliables, a introduit la méthode cinématique en géométrie.

On ne peut plus aujourd'hui s'occuper des surfaces sans faire intervenir les systèmes conjugués, ni des systèmes conjugués sans faire intervenir quelque congruence de droites, soit que celle-ci découpe le réseau conjugué sur la surface, soit qu'elle soit formée par les tangentes à l'une des lignes du réseau. Les réseaux conjugués sont d'autre part en dépendance avec les équations autrefois envisagées par Laplace et il se trouve que les transformations que l'on connaissait de ces équations correspondent au passage de l'une à l'autre des surfaces focales de la congruence.

La représentation sphérique d'une surface, qui apparaissait comme un artifice génial de Gauss pour étendre aux surfaces la notion de courbure, en analogie avec les courbes, s'est trouvée rentrer dans les idées de dualité de Chasles qui conduisent à définir une surface par ses plans tangents. Il suffisait, comme Darboux l'a montré, d'introduire la distance d'un point fixe au plan tangent à côté des cosinus directeurs de la normale que Gauss avait considérés pour définir la représentation sphérique de la surface.

Le problème ardu de la déformation des surfaces restera un exem-

ple éternellement frappant de rapprochements imprévus et féconds. Si, comme Bour avait pu le croire un instant, on avait réussi l'intégration de l'équation aux dérivées partielles dont dépend analytiquement le problème, celui-ci eût, sans doute beaucoup perdu de son intérêt aux yeux de nombre de mathématiciens trop enclins à n'apprécier en ces questions que le côté analytique. Or le problème est resté entier à cet égard. Cela n'a empêché ni Ribaucour et Darboux de mettre au jour leurs systèmes cycliques, ni Darboux et toute une pléiade de géomètres de découvrir les singulières circonstances qui accompagnent la déformation des quadriques.

Nous ne saurions multiplier ici les exemples analogues qui abondent en Géométrie transcendante. Les quelques-uns que nous venons de donner suffisent pour faire comprendre que, de nos jours, les immortels travaux des anciens géomètres du siècle dernier ne doivent plus nous apparaître comme des monuments isolés, mais bien plutôt comme les superbes arceaux d'un unique et grandiose édifice dont toutes les parties sont solidaires et où il n'est plus permis au géomètre de se cantonner en un coin. Les questions sont aujourd'hui tellement liées entre elles qu'un chercheur qui poursuit un problème pris sur un terrain déterminé ne peut se flatter d'y conserver le même horizon ; car il arrive souvent que la claire solution et le plein épanouissement du problème s'opèrent sur un terrain très différent de celui d'où l'on est parti.

Il est toujours maladroit de prétendre isoler une question que l'on étudie et voilà pourquoi on ne peut conseiller de l'aborder de but en blanc par l'analyse. Une question de structure se trouve à chaque instant posée, qui ne se confond pas plus avec le calcul que le projet de l'architecte avec les mœllons et la chaux qu'empilent ses ouvriers. Dans toute question de structure géométrique rien ne peut suppléer à une connaissance profonde de la matière géométrique elle-même, à l'application d'une opiniâtre réflexion, enfin à l'exercice spontané de l'intuition. Ce n'est pas que souvent le résultat obtenu ne revête une forme simple que le calcul après coup retrouvera sans effort. Mais vraiment le difficile est d'abord d'y penser.

Cette existence propre et indépendante de l'esprit géométrique a donné lieu de tous temps à des divergences d'appréciations dont il serait sans doute prématuré de prédire la fin. Les *Eloges Académiques* de Joseph Bertrand en évoquent quelques épisodes illustres dans le passé. L'un des plus frappants est la froideur avec laquelle Cauchy accueillit, en son temps, l'apparition du célèbre *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet. Plus tard la résistance se manifesta par le peu de faveur accordée aux découvertes de Chasles,

aujourd'hui immortelles. Il fallut les mémoires, si remarquables d'ailleurs, sur l'attraction des ellipsoïdes pour effacer certaines préventions.

A l'appui de la thèse générale, il ne sera pas déplacé de citer ici quelques lignes de l'*Eloge* de Poncelet par Joseph Bertrand :

« Descartes, dit Bertrand, avait cru, par des procédés uniformes, « de calcul, abolir le droit d'inventer avec génie en Géométrie. « Croyant avoir tout préparé et tout prévu, en laissant sur plus d'un « point à ses successeurs le plaisir d'accomplir le progrès, il en usur- « pait par avance tout le mérite et toute la gloire. « J'espère, disait-il, « que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai « expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement « pour leur laisser le plaisir de les inventer ».

« Ceux, poursuit Joseph Bertrand, qui, sur la foi d'un si fier génie, « ont cru l'ère des découvertes originales terminées dans l'étude « des courbes, cherchèrent naturellement dans d'autres parties de la « Science un plus fructueux emploi de leurs efforts et le progrès le « plus grand, sans difficulté, qu'ait jamais fait cette belle théorie, a « été ainsi l'occasion et le signal d'un temps d'arrêt dans sa « marche.

« Descartes oubliait que, suivant la très heureuse expression d'un « géomètre contemporain, la géométrie est un art aussi bien qu'une « science : *Mathesis ars et scientia dicenda* ; et, s'il est quelquefois « possible à une science de marquer dans une formule définitive la « fin de ses efforts et le terme de ses progrès, l'art est inépuisable « et infini, toujours jeune et toujours fécond pour des génies nou- « veaux » (1).

Nous sera-t-il permis d'introduire ici un autre point de vue. De nos jours, le développement intensif des théories analytiques et la grande place qu'elles tiennent dans les programmes réalisent ce résultat que c'est surtout à une gymnastique de rigoureuse et abstraite logique que sont exercées les intelligences de nos jeunes gens. Or l'expérience déjà ancienne des examens dit trop éloquemment combien incomplète et inopérante est cette formation si elle ne trouve pas un contrepoids dans la pratique des réalités plus concrètes de la Géométrie ou de la Mécanique. Il est donc grandement à souhaiter que le goût et le culte de la Géométrie soient favorisés dans notre enseignement plus qu'ils ne le sont aujourd'hui.

Le livre de M. Vessiot est de nature à contribuer, sur le terrain le plus élevé, à la diffusion de ces bienfaisantes études où le génie

(1) *Eloges Académiques*, par Joseph Bertrand, Hachette, 1890, p. 108.

français s'est si harmonieusement manifesté en élégance et en grandeur. M. Vessiot, qui est aussi un analyste averti, a su donner à son exposition cette forme impeccable dans la précision, qui facilite précieusement le maniement des notions quantitatives et des formules générales où elles interviennent.

Il a englobé dans son livre tout ce qu'il est essentiel de connaître pour être à même de lire avec fruit les travaux originaux des inventeurs. Les amis de la Géométrie ne peuvent que se réjouir de l'aide que ce livre va apporter à leur science favorite et doivent former les meilleurs vœux pour la continuation de son succès.

G. Kœnigs.

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION

Ces leçons ont été professées, à la Faculté des Sciences de Lyon, en 1905-1906, pour répondre au programme spécial d'Analyse Mathématique de l'Agrégation. Elles ont été autographiées sur la demande de mes étudiants, et rédigées par l'un d'eux.

Peut-être pourront-elles être utiles aux étudiants désireux de s'initier à la géométrie supérieure, et leur être une bonne préparation à l'étude des livres de M. Darboux et des mémoires originaux.

J'ai supposé connus seulement les principes les plus simples de la théorie du contact; j'ai repris les points essentiels de la théorie des courbes gauches et de la théorie des surfaces, en mettant en évidence le rôle essentiel des formules de Frenet, et des deux formes différentielles quadratiques de Gauss.

L'objet principal de mes leçons était l'étude des systèmes de droites, et leur application à la théorie des surfaces. Il était naturel d'y joindre l'étude des systèmes de sphères, que j'ai poussée jusqu'aux propriétés élémentaires, si attrayantes, des systèmes cycliques de Ribaucour. J'ai insisté sur la correspondance entre les droites et les sphères; je l'ai éclairée par l'emploi des notions d'éléments de contact et de multiplicités, qui est également utile dans la théorie des congruences de rayons; j'ai montré comment elle se traduit par la célèbre transformation de contact de Lie.

J'ai cherché à développer les divers sujets par la voie la plus naturelle et la plus analytique; voulant montrer à mes élèves comment la recherche méthodique, la discussion approfondie des questions même les plus simples, l'étude attentive et l'interprétation des résultats des calculs, peuvent conduire aux conséquences les plus variées et les plus intéressantes.

Lyon, le 1er juin 1906.

E. Vessiot.

AVERTISSEMENT

La première édition de ces leçons, autographiée, ayant été rapidement épuisée, j'ai accepté l'offre de réimpression que m'a faite M. Hermann.

Les fautes d'impression avaient été corrigées par M. Anzemberger en vue de cette réédition. J'ai revu et amélioré la rédaction; et j'y ai fait des additions importantes. M. Grévy a bien voulu m'aider pour la révision du texte et la correction des épreuves : je lui en exprime ici toute ma reconnaissance. J'adresse aussi mes remerciements à M. Hermann pour le soin apporté à l'impression.

J'ai renoncé à donner des indications bibliographiques. Ceci est un livre d'initiation, et les lecteurs désireux de poursuivre des recherches géométriques devront toujours se reporter aux admirables ouvrages de Darboux, où ils trouveront la documentation nécessaire.

Le 30 septembre 1919.

E. Vessiot.

CHAPITRE PREMIER

REVISION DES POINTS ESSENTIELS DE LA THÉORIE DES COURBES GAUCHES ET DES SURFACES DÉVELOPPABLES

I. — COURBES GAUCHES

Trièdre de Serret-Frenet

1. — Soit une courbe gauche (C), dont nous supposerons les coordonnées exprimées en fonction d'un paramètre t :

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Nous considérerons dans une telle courbe la *tangente*, qui a pour paramètres directeurs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et le *plan osculateur* qui contient la tangente $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ et l'accélération $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$, et dont, par suite, les coefficients sont les déterminants du 2e degré déduits du tableau :

$$\begin{matrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{matrix}.$$

Remarque. — Si on change de paramètre, en posant $t = \varphi(u)$, l'accélération nouvelle $\left(\frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^2y}{du^2}, \frac{d^2z}{du^2}\right)$ est toujours dans le plan osculateur.

Considérons en un point M de la courbe la tangente MT, la normale située dans le plan osculateur, ou *normale principale* MN, et la normale MB perpendiculaire au plan osculateur, ou *binormale*. Ces trois droites forment un trièdre trirectangle que nous appellerons *trièdre de Serret* ou *de Frenet*. L'une de ses faces, celle qui est déterminée par la tangente et la normale principale, est le plan osculateur ; celle qui est déterminée par la normale principale et la binormale est le

plan normal ; enfin celle qui est déterminée par la tangente et la binormale s'appelle le *plan rectifiant*.

Prenons sur la courbe une origine des arcs quelconque, et un sens des arcs croissants également quelconque. La différentielle de l'arc s est donnée par la formule :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d'où :

$$\frac{ds}{dt} = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

$\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont ainsi les cosinus directeurs d'une des directions de la tangente, celle qui correspond au sens des arcs croissants ; soient α, β, γ ces cosinus directeurs :

$$(1) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Nous prendrons sur la normale principale une direction positive arbitraire, de cosinus directeurs α', β', γ', et sur la binormale une direction positive, de cosinus directeurs α'', β'', γ'', telle que le trièdre constitué par ces trois directions ait même disposition que le trièdre de coordonnées. Alors :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1,$$

et chaque élément de ce déterminant est égal à son coefficient dans le développement du déterminant.

Formules de Serret-Frenet

2. — Il existe entre ces cosinus directeurs et leurs différentielles des relations importantes. En effet, de la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

on tire, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à s :

$$\Sigma\alpha \frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Mais d'après les relations (1) :

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \frac{d\beta}{ds}=\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{d^2z}{ds^2},$$

et la relation précédente s'écrit :

$$\Sigma\alpha\frac{d^2x}{ds^2}=0.$$

La direction de coefficients directeurs :

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\alpha}{ds},\ \frac{d\beta}{ds},\ \frac{d\gamma}{ds}$$

est donc perpendiculaire à la tangente ; d'autre part, elle est dans le plan osculateur, puisque c'est l'accélération correspondant au paramètre s ; c'est donc la normale principale, et par conséquent il existe un nombre R tel que :

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}.$$

On en déduit, en multipliant respectivement par α',β',γ' et ajoutant membre à membre :

$$(3) \qquad \frac{1}{R}=\Sigma\alpha'\frac{d\alpha}{ds}.$$

En multipliant maintenant par $\alpha'',\beta'',\gamma''$ et en ajoutant, on obtient :

$$\Sigma\alpha''\frac{d\alpha}{ds}=0.$$

D'autre part :

$$\Sigma\alpha\alpha''=0,$$

d'où, en prenant les dérivées par rapport à s :

$$\Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{ds}+\Sigma\alpha''\frac{d\alpha}{ds}=0,$$

et par suite :

$$\Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{ds}=0.$$

D'ailleurs :

$$\Sigma\alpha''^2=1,$$

d'où :

$$\Sigma\alpha''\frac{d\alpha''}{ds}=0\ ;$$

et les deux relations précédentes montrent que la direction :

$$\frac{d\alpha''}{ds}, \quad \frac{d\beta''}{ds}, \quad \frac{d\gamma''}{ds}$$

est perpendiculaire à la tangente et à la binormale. C'est donc encore la normale principale, et il existe un nombre T tel que :

$$(4) \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}.$$

On en déduit, en multipliant respectivement par α', β', γ' et ajoutant membre à membre :

$$(5) \qquad \frac{1}{T} = \Sigma\alpha' \frac{d\alpha''}{ds}.$$

Enfin de la relation :

$$\Sigma\alpha'\alpha'' = 0$$

on tire :

$$\Sigma\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \Sigma\alpha'' \frac{d\alpha'}{ds} = 0$$

ou :

$$\Sigma\alpha'' \frac{d\alpha'}{ds} = -\Sigma\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} = -\frac{1}{T}.$$

De la relation :

$$\Sigma\alpha'\alpha = 0$$

on tire de même :

$$\Sigma\alpha \frac{d\alpha'}{ds} = -\Sigma\alpha' \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R};$$

et enfin de la relation :

$$\Sigma\alpha'^2 = 1$$

on tire :

$$\Sigma\alpha' \frac{d\alpha'}{ds} = 0;$$

d'où trois équations en : $\frac{d\alpha'}{ds}, \frac{d\beta'}{ds}, \frac{d\gamma'}{ds}$:

$$\Sigma\alpha \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{1}{R}, \qquad \Sigma\alpha' \frac{d\alpha'}{ds} = 0, \qquad \Sigma\alpha'' \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{1}{T};$$

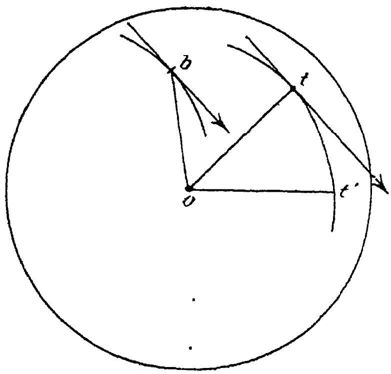
dont la résolution donne :

$$(6) \quad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}.$$

Les trois groupes de relations (2), (4), (6) constituent *les formules de Serret* ou *de Frenet*.

Courbure et Torsion

3. — *Interprétation de* R. — Considérons le point t de coordonnées α, β, γ. Les formules (2) expriment une propriété de la courbe lieu de ces points ; cette courbe est tracée sur une sphère de rayon 1, on l'appelle *indicatrice sphérique* de la courbe (C), et les formules (2) montrent que *la tangente en* t *à l'indicatrice sphérique est parallèle à la normale principale en* M *à la courbe* (C). Soit σ l'arc de cette indicatrice compté à partir d'une origine arbitraire dans un sens également arbitraire :



$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \varepsilon\alpha', \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = \varepsilon\beta', \quad \frac{d\gamma}{d\sigma} = \varepsilon\gamma' ;$$

d'où, en tenant compte des formules (2) :

$$\frac{1}{R} = \varepsilon \frac{d\sigma}{ds} .$$

Considérons alors les points t, t' correspondant aux points M, M' ; $\frac{d\sigma}{ds}$ est, au signe près, la limite du rapport $\frac{\text{arc } tt'}{\text{arc MM}'}$ quand M' tend vers M. L'arc tt' est un infiniment petit équivalent à l'arc de grand cercle tt', qui a même mesure que l'angle tOt' des deux tangentes infiniment voisines ou *angle de contingence* ; $\left|\frac{d\sigma}{ds}\right|$ est donc la limite du rapport $\frac{\text{angle } \widehat{tOt'}}{\text{arc } \widehat{MM'}}$, qui s'appelle la *courbure* de la courbe au point M ; R est le *rayon de courbure* au point M.

Interprétation de T. — Pour interpréter T, on considèrera de même le lieu du point b de coordonnées α'', β'', γ'', ou *deuxième indicatrice sphérique*. On remarquera que d'après les formules (2), (4), *les tangentes en* t, b *aux deux indicatrices sont parallèles à la normale principale en* M. Si τ est l'arc de cette deuxième indicatrice sphérique, on trouvera comme précédemment que :

$$\frac{1}{T} = \varepsilon' \frac{d\tau}{ds} \qquad (\varepsilon' = \pm 1),$$

et que $\left|\frac{1}{T}\right|$ est la limite du rapport de l'angle des plans osculateurs en M, M′ à l'arc MM′ quand M′ tend vers M ; c'est la *torsion* en M, et T est le *rayon de torsion.*

Les deux indicatrices sont polaires l'une de l'autre sur la sphère.

Discussion. Centre de courbure

4. — Les cosinus directeurs que nous avons introduits dépendent de trois hypothèses arbitraires, sur le sens des arcs croissants, le sens positif choisi sur la normale principale et sur la disposition du trièdre de coordonnées. Si nous changeons ces hypothèses, et si nous désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des nombres égaux à ± 1, s sera remplacé par $\varepsilon_1 s$; α, β, γ deviendront $\varepsilon_1\alpha$, $\varepsilon_1\beta$, $\varepsilon_1\gamma$; α', β', γ' deviendront $\varepsilon_2\alpha'$, $\varepsilon_2\beta'$, $\varepsilon_2\gamma'$; et enfin, d'après les relations :

$$\alpha'' = \varepsilon_3(\beta\gamma' - \gamma\beta'), \qquad \beta'' = \varepsilon_3(\gamma\alpha' - \alpha\gamma'), \qquad \gamma'' = \varepsilon_3(\alpha\beta' - \beta\alpha'),$$

$\alpha'', \beta'', \gamma''$ seront remplacés par $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\alpha''$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\beta''$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\gamma''$. Les formules (2) donnent alors :

$$\frac{\varepsilon_1 d\alpha}{\varepsilon_1 ds} = \frac{\varepsilon_2\alpha'}{R} \quad ,\ldots$$

c'est-à-dire que R se change en $\varepsilon_2 R$; et son signe ne dépend que de la direction positive choisie sur la normale principale.

Donc le point C de la normale principale, tel que $MC = R$ (R étant défini algébriquement comme précédemment), est un élément géométrique attaché à la courbe donnée. Ce point C s'appelle *centre de courbure en* M.

Voyons maintenant T. Les formules (4) donnent :

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 d\alpha''}{\varepsilon_1 ds} = \frac{\varepsilon_2\alpha'}{T} \quad ,\ldots.$$

ou :

$$\varepsilon_3 \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T} \quad ,\ldots.$$

Donc T se change en $\varepsilon_3 T$; et le signe de T dépend uniquement de la disposition du trièdre de coordonnées. Il n'y a donc pas lieu de définir un centre de torsion.

Signe de la torsion. Forme de la courbe

5. — Pour interpréter le signe de T, nous allons étudier la rotation d'un plan passant par la tangente MT et par un point M' de la courbe, infiniment voisin de M. Rapportons la courbe au trièdre de Serret, la tangente étant OX, la normale principale OY, la binormale OZ. Alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$: $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, $\gamma' = 0$; $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 1$. Nous allons chercher les développements des coordonnées d'un point de la courbe, infiniment voisin de M, suivant les puissances croissantes de ds (l'arc de la courbe compté à partir du point M).

Nous avons :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ds}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{ds^2}{2}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{ds^3}{6}\frac{d^3x}{ds^3} + \dots, \\ Y &= \dots, \\ Z &= \dots. \end{aligned}\right.$$

Or, d'après les formules de Frenet :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha = 1,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R} = 0,$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds} = \frac{1}{R}\left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}\right) - \frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds} = -\frac{1}{R^2}$$

et de même pour les autres coordonnées. On trouve ainsi :

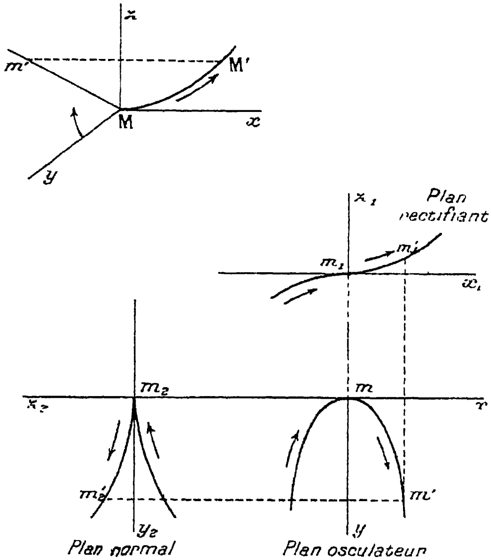
$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= ds \qquad\qquad - \frac{1}{6R^2}ds^3 + \dots \\ Y &= \frac{1}{2R}ds^2 - \frac{1}{6R^2}\frac{dR}{ds}ds^3 + \dots \\ Z &= \qquad\qquad\quad - \frac{1}{6RT}ds^3 + \dots \end{aligned}\right.$$

Tels sont les développements des coordonnées du point M' infiniment voisin de M.

Le plan que nous considérons passe par la tangente ; le sens initial de sa rotation, quand ds varie à partir de zéro, est donné par le signe de $\frac{Z}{Y}$, coefficient angulaire de sa trace sur le plan des YZ. Or :

$$\frac{Z}{Y} = -\frac{ds}{3T}[1 + ds(\dots\dots)].$$

Ce coefficient angulaire est positif, si $T < O$, pour s croissant, c'est-à-dire quand le point se déplace dans la direction positive de la tangente ; le plan va alors tourner dans le sens positif. Si, de plus, on suppose, par exemple, $R > o$, le point M' étant au-dessus du plan des XY, l'arc MM' de la courbe est en avant du plan des XZ, si $T < O$; il est au contraire en arrière si $T > O$.



Les formules (7) permettent de représenter les projections de la courbe sur les trois faces du trièdre de Serret dans le voisinage du point M. Nous supposerons pour dessiner ces projections $R > O$ et $T < O$.

La considération des formules (7) prises deux à deux montre que sur le plan rectifiant (XZ) la projection a au point m_1 un point d'inflexion, la tangente inflexionnelle étant OX. Sur le plan osculateur, la projection a au point m un point ordinaire, la tangente étant OX ; enfin sur le plan normal (YZ) la projection a en m_2 un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant OY.

Mouvement du trièdre de Serret-Frenet

6. — *Remarque*. — Considérons un point P invariablement lié au trièdre de Serret, et soient X, Y, Z ses coordonnées constantes par rapport à ce trièdre ; soient ξ, η, ζ les coordonnées de ce point par rapport à un système d'axes fixes. Lorsque le sommet du trièdre de Serret décrit la courbe donnée, les projections de la vitesse du point P sur les axes fixes sont, en remarquant que :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ \eta &= y + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ \zeta &= z + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dx}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt} \\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{dy}{dt} + X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt} \\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{dz}{dt} + X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt}
\end{aligned}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \left[\alpha + X\frac{\alpha'}{R} - Y\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right) + Z\frac{\alpha'}{T}\right]\frac{ds}{dt} \\
\frac{d\eta}{dt} &= \dots \\
\frac{d\zeta}{dt} &= \dots
\end{aligned}\right.$$

Les projections de la vitesse sur les axes mobiles sont alors :

$$\left.\begin{aligned}
V_x &= \alpha\frac{d\xi}{dt} + \beta\frac{d\eta}{dt} + \gamma\frac{d\zeta}{dt} = \left(1 - \frac{Y}{R}\right)\frac{ds}{dt} \\
V_y &= \alpha'\frac{d\xi}{dt} + \beta'\frac{d\eta}{dt} + \gamma'\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{X}{R} + \frac{Z}{T}\right)\frac{ds}{dt} \\
V_z &= \alpha''\frac{d\xi}{dt} + \beta''\frac{d\eta}{dt} + \gamma''\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{Y}{T}\frac{ds}{dt}
\end{aligned}\right\}$$

$\frac{ds}{dt}$ est la vitesse du sommet du trièdre. Si nous ne considérons que la vitesse de rotation, nous savons que, si p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée sur les axes mobiles :

$$V_x = qZ - rY, \qquad V_y = rX - pZ, \qquad V_z = pY - qX,$$

et nous trouvons ainsi, en identifiant avec les expressions précédentes :

$$p = -\frac{1}{T}\frac{ds}{dt}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt},$$

ce qui montre qu'*à chaque instant la rotation instantanée est dans le plan rectifiant, et qu'elle a pour composantes suivant la tangente et la binormale la torsion et la courbure, si on suppose $t = s$.*

Si l'on suppose le trièdre de Serret transporté à l'origine, il tourne autour de son sommet, l'axe instantané de rotation est dans le plan rectifiant, et le mouvement du trièdre est obtenu par le roulement de ce plan sur un certain cône.

Calcul de R

7. — Reprenons la formule (3) :

$$\frac{1}{R} = \Sigma\alpha' \frac{d\alpha}{ds}.$$

De la relation :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}$$

on tire :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^3}.$$

Posons maintenant :

$$A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z, \quad C = dxd^2y - dyd^2x,$$

et :

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = D.$$

A,B,C sont les coefficients du plan osculateur ; par suite, le signe de D pouvant être arbitrairement choisi, les cosinus directeurs de la binormale sont :

$$\alpha'' = \frac{A}{D}, \qquad \beta'' = \frac{B}{D}, \qquad \gamma'' = \frac{C}{D},$$

et les cosinus directeurs de la normale principale sont :

$$\alpha' = \gamma\beta'' - \beta\gamma'' = \frac{Bdz - Cdy}{Dds} = \frac{d^2x(dy^2 + dz^2) - dx(dyd^2y + dzd^2z)}{Dds}$$

$$= \frac{d^2xds^2 - dxdsd^2s}{Dds} = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{D};$$

et, de même :

$$\beta' = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{D},$$

$$\gamma' = \frac{dsd^2z - dzd^2s}{D};$$

et alors :

$$\frac{1}{R} = \Sigma\alpha' \frac{d\alpha}{ds} = \Sigma \frac{Bdz - Cdy}{Dds} \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^3},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{Dds^3}\Sigma d^2x(Bdz-Cdy)-\frac{d^2s}{Dds^4}\Sigma dx(Bdz-Cdy).$$

La deuxième somme est nulle, et :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{Dds^3}\Sigma d^2x(Bdz-Cdy)=\frac{1}{Dds^3}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix}=\frac{D}{ds^3},$$

d'où enfin :

$$\left|\frac{1}{R}\right|=\frac{\sqrt{\Sigma(dyd^2z-dzd^2y)^2}}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul de T

8. — De même :

$$\frac{1}{T}=\Sigma\alpha'\frac{d\alpha''}{ds}=\Sigma\frac{Bdz-Cdy}{D.ds}\frac{D.dA-AdD}{D^2ds},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{D^2ds^2}\Sigma dA(Bdz-Cdy)-\frac{dD}{D^3ds^2}\Sigma A(Bdz-Cdy).$$

La deuxième somme est nulle, et :

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{D^2ds^2}\Sigma dA(Bdz-Cdy)=\frac{1}{D^2ds}\Sigma(dyd^3z-dzd^3y)(dsd^2x-dxd^2s),$$

ou :

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{D^2}\Sigma d^2x(dyd^3z-dzd^3y)-\frac{d^2s}{D^2ds}\Sigma dx(dyd^3z-dzd^3y).$$

La deuxième somme est nulle, et :

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{D^2}\Sigma d^2x(dyd^3z-dzd^3y)=-\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix},$$

où :

$$D^2=\Sigma(dyd^2z-dzd^2y)^2.$$

Remarque. — Pour que la torsion d'une courbe soit constamment nulle, il faut et il suffit que l'on ait constamment :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$

ce qui exige que x, y, z soient liés par une relation linéaire, à coefficients constants, c'est-à-dire que la courbe soit plane. Ainsi *les courbes à torsion constamment nulle sont les courbes planes.*

Sphère osculatrice

9. — Cherchons les sphères qui ont en M, avec la courbe considérée, un contact du second ordre. Le centre (x_0, y_0, z_0) et le rayon R_0 d'une telle sphère sont, d'après la théorie du contact, déterminés par les équations suivantes, que nous développons au moyen des formules de Serret-Frenet :

$$\Sigma(x - x_0)^2 - R_0^2 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left[\Sigma(x - x_0)^2 - R_0^2\right] = 0, \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\alpha(x - x_0) = 0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[\Sigma(x - x_0)^2 - R_0^2\right] = 0, \qquad \text{ou} \qquad 1 + \frac{1}{R}\Sigma\alpha'(x - x_0) = 0.$$

Si on prend le trièdre de Serret-Frenet pour trièdre de coordonnées, comme on l'a fait plus haut, elles se réduisent à :

$$\Sigma x_0^2 - R_0^2 = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = R_0^2\,;$$

et l'équation générale des sphères cherchées est, Z_0 restant arbitraire,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2RY - 2Z_0Z = 0.$$

C'est un faisceau de sphères, dont fait partie le plan osculateur $Z = 0$. On vérifie ainsi la propriété de contact du plan osculateur.

Le cercle commun à toutes ces sphères est, de plus, d'après la théorie du contact des courbes, celui qui a un contact du second ordre avec la courbe, c'est-à-dire le *cercle osculateur*. Ses équations sont :

$$Z = 0, \qquad X^2 + Y^2 - 2RY = 0,$$

donc il est dans le plan osculateur, a pour centre le centre de courbure C ($X = 0$, $Y = R$), et passe en M. Le lieu des centres des sphères considérées est l'axe du cercle osculateur.

Parmi toutes ces sphères, il y en a une qui a un contact du troisième ordre avec la courbe. On l'obtient en introduisant la condition nouvelle :

$$\frac{d^3}{ds^3}\left[\Sigma(x-x_0)^2 - R_0^2\right] = o,$$

c'est-à-dire :

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\Sigma\alpha'(x-x_0) - \frac{1}{R}\left[\frac{1}{R}\Sigma\alpha(x-x_0) + \frac{1}{T}\Sigma\alpha''(x-x_0)\right] = o,$$

qui se réduit, avec les axes particuliers employés, et les valeurs trouvées précédemment pour x_0, y_0, à :

$$z_0 = -T\frac{dR}{ds}.$$

Le centre de cette sphère, qui est la *sphère osculatrice*, est donc défini par les formules :

$$X_0 = o, \qquad Y_0 = +R, \qquad Z_0 = -T\frac{dR}{ds}$$

et son rayon est donné par la formule :

$$R_0^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

II. — SURFACES DÉVELOPPABLES

Propriétés générales

10\. — Une courbe gauche est le lieu de ∞^1 points ; corrélativement nous considérerons une surface développable, enveloppe de ∞^1 plans ; la caractéristique de l'un de ces plans correspond corrélativement à la tangente en un point de la courbe, puisqu'elle est l'intersection de deux plans infiniment voisins.

Soit :

$$uX + vY + wZ + h = o, \tag{1}$$

l'équation générale des plans considérés, de sorte que u, v, w, h désignent des fonctions données d'un paramètre t.

Les caractéristiques ont, d'après la théorie des enveloppes, pour équations générales,

$$\left\{\begin{array}{l} uX + vY + wZ + h = o \\ Xdu + Ydv + Zdw + dh = o. \end{array}\right. \tag{2}$$

La surface développable, enveloppe des plans (1), est, d'après la théorie des enveloppes, le lieu des droites (2), qui en sont, par conséquent, les génératrices rectilignes ; et, toujours d'après la théorie des enveloppes, chacun des plans (1) est tangent à la surface tout le long de la génératrice (2) correspondant à la même valeur de t.

Considérons alors la courbe (C), lieu des points (x, y, z) définis par les équations :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &ux + vy + wz + h = 0, \\ &xdu + ydv + zdw + dh = 0, \\ &xd^2u + yd^2v + zd^2w + d^2h = 0. \end{aligned} \right.$$

L'un quelconque de ses points M est sur la droite (2), correspondant à la même valeur de t, et, par conséquent, dans le plan (1) correspondant. Cherchons la tangente à (C) en M. Pour cela, différentions les équations (3) ; différentiant chacune des deux premières, en tenant compte de la suivante, nous trouvons :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &u.dx + v.dy + w.dz = 0 \\ &du.dx + dv.dy + dw.dz = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui exprime que la direction de la tangente est la même que celle de la droite (2). Donc les tangentes à (C) sont les génératrices de la développable.

Cherchons encore le plan osculateur à (C) en M. Il doit passer par la tangente, et être parallèle à la direction (d^2x, d^2y, d^2z). Or si on différentie la première des équations (4), en tenant compte de la seconde, on trouve :

$$u.d^2x + v.d^2y + w.d^2z = 0,$$

ce qui montre que le plan (1) satisfait aux conditions précédentes. Donc le plan osculateur de (C) est le plan qui enveloppe la développable.

(C) s'appelle l'*arête de rebroussement* de la développable.

Donc *toute développable est l'enveloppe des plans osculateurs à son arête de rebroussement, et est engendrée par les tangentes à son arête de rebroussement.*

Remarques. — Nous avons fait implicitement diverses hypothèses. D'abord que les équations (3) définissent x, y, z, c'est-à-dire que leur déterminant n'est pas identiquement nul. S'il l'est, on a, quel que soit t :

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ du & dv & dw \\ d^2u & d^2v & d^2w \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que u, v, w sont liés par une relation linéaire homogène à coefficients constants ; c'est-à-dire que les plans (1) sont parallèles à une droite fixe. Dans ce cas, les droites (2) sont parallèles à cette même direction, et la surface est un *cylindre*. Dans ce cas figure, comme cas singulier, celui où tous les plans (1) passent par une droite fixe, qui est alors l'enveloppe.

Ecartant ce cas, nous avons admis qu'il y avait un lieu des points M. Ceci suppose que M n'est pas fixe. S'il en était ainsi, les équations (3) étant vérifiées par les coordonnées de ce point fixe, les plans (1) passeraient par ce point fixe, ainsi que les droites (2). L'enveloppe serait un *cône*.

Ecartons encore ce cas. Nous avons admis de plus que les droites (2) engendraient une surface. Or cela n'est en défaut que si elles sont toutes confondues, ce qui est le cas singulier déjà examiné.

Remarquons enfin que la courbe (C) est forcément gauche, car si elle était plane, son plan étant son plan osculateur unique, et nos raisonnements ne cessant pas de s'appliquer, tous les plans (1) seraient confondus. Il n'y aurait donc pas ∞^1 plans (1).

Réciproques

11. — *Réciproquement les plans osculateurs en tous les points d'une courbe gauche enveloppent une développable.* — En effet, si nous reprenons les notations du § I, le plan osculateur en un point x,y,z d'une courbe a pour équation :

$$\Sigma\alpha''(X - x) = 0.$$

Sa caractéristique est représentée par l'équation précédente et :

$$\Sigma \frac{d\alpha''}{ds}(X - x) - \Sigma\alpha'' \frac{dx}{ds} = 0.$$

Or

$$\Sigma\alpha'' \frac{dx}{ds} = \Sigma\alpha\alpha'' = 0, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T};$$

les équations de la caractéristique sont donc :

$$\Sigma\alpha''(X - x) = 0, \qquad \Sigma\alpha'(X - x) = 0.$$

Si on prend comme trièdre de coordonnées le trièdre de Serret-Frenet, elles se réduisent à :

$$Z = 0, \qquad Y = 0.$$

Donc la caractéristique du plan osculateur en un point d'une courbe gauche est la tangente à cette courbe, et l'enveloppe de ce plan est bien une surface développable. L'arête de rebroussement est définie par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma\alpha''(X-x)=0, \\ \Sigma\alpha'(X-x)=0, \\ \Sigma\dfrac{d\alpha'}{ds}(X-x)-\Sigma\alpha'\dfrac{dx}{ds}=0. \end{array}\right.$$

Considérons la troisième équation ; remarquons que :

$$\Sigma\alpha'\frac{dx}{ds}=\Sigma\alpha\alpha'=0,$$

et

$$\frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T}.$$

Cette équation devient alors

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)(X-x)=0,$$

ou encore, en tenant compte de la première équation :

$$\Sigma\alpha(X-x)=0.$$

Nous obtenons ainsi trois équations linéaires et homogènes en $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, dont le déterminant est 1 ; donc :

$$X-x=0; \qquad Y-y=0, \qquad Z-z=0;$$

l'arête de rebroussement est la courbe elle-même.

Remarque. — Le nom d'arête de rebroussement provient de ce fait que la *section de la développable par le plan normal en* M *à l'arête de rebroussement présente au point* M *un point de rebroussement.* En effet, rapportons la courbe au trièdre de Serret relatif au point M : les coordonnées d'un point de la courbe voisin du point M sont, d'après les formules établies au nº 5 :

$$\left\{\begin{array}{l} x=ds \qquad\qquad -\dfrac{1}{6R^2}ds^3+\ldots, \\ y=\dfrac{1}{2R}ds^2-\dfrac{1}{6R^2}\dfrac{dR}{ds}ds^3+\ldots, \\ z=\qquad\qquad\quad -\dfrac{1}{6RT}ds^3+\ldots \end{array}\right.$$

Les coordonnées d'un point de la tangente au point x, y, z sont :

$$X = x + \lambda \frac{dx}{ds} = \left(ds - \frac{1}{6R^2} ds^3 + \dots \right) + \lambda \left(1 - \frac{1}{2R^2} ds^2 + \dots \right)$$

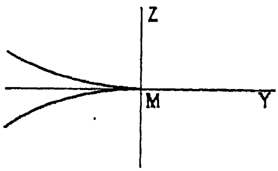
$$Y = y + \lambda \frac{dy}{ds} = \left(\frac{1}{2R} ds^2 - \frac{1}{6R^2} \frac{dR}{ds} ds^3 + \dots \right) + \lambda \left(\frac{1}{R} ds - \frac{1}{2R^2} \frac{dR}{ds} ds^2 + \dots \right)$$

$$Z = z + \lambda \frac{dz}{ds} = \left(- \frac{1}{6RT} ds^3 + \dots \right) + \lambda \left(- \frac{1}{2RT} ds^2 + \dots \right).$$

Prenons l'intersection de cette tangente avec le plan normal $X = 0$, ce qui donne :

$$\lambda = - \frac{ds + \dots}{1 + \dots} = - ds + \dots ;$$

et la courbe d'intersection a pour équations :



$$Y = - \frac{1}{2R} ds^2 + \dots$$

$$Z = \frac{1}{3RT} ds^3 + \dots$$

On voit qu'elle a au point M un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant la normale principale.

Surface rectifiante. — Surface polaire

12. — *Remarques.* — Cherchons les surfaces développables enveloppes des faces du trièdre de Serret dans une courbe gauche (C). Nous venons de voir que *le plan osculateur enveloppe la surface développable qui admet pour arête de rebroussement* (C).

Considérons maintenant le plan rectifiant :

$$\Sigma \alpha' (X - x) = 0$$

la caractéristique est représentée par l'équation précédente et par l'équation :

$$\frac{1}{R} \Sigma \alpha (X - x) + \frac{1}{T} \Sigma \alpha'' (X - x) = 0.$$

Si on prend les axes de Serret, ces équations deviennent :

$$Y = 0, \qquad \frac{1}{R} X + \frac{1}{T} Z = 0,$$

la caractéristique contient le point $Y = 0$, $X = -\frac{1}{T}$, $Z = \frac{1}{R}$, extrémité du vecteur qui représente la rotation instantanée du trièdre; *c'est l'axe instantané de rotation du trièdre de Serret.* Son lieu s'appelle la *surface rectifiante.* Elle contient la courbe (C).

Considérons enfin le plan normal :

$$\Sigma\alpha(X - x) = 0,$$

l'autre équation de la caractéristique est :

$$\Sigma \frac{d\alpha}{ds}(X - x) - \Sigma\alpha \frac{dx}{ds} = 0,$$

ou :

$$\frac{1}{R} \Sigma\alpha'(X - x) - 1 = 0.$$

Cette caractéristique s'appelle la *droite polaire*, et son lieu s'appelle la *surface polaire.*

Prenant encore les axes de Serret, les équations de la droite polaire deviennent :

$$X = 0, \qquad Y = R.$$

La droite polaire est donc *l'axe du cercle osculateur.*

Le point de contact de la droite polaire avec l'arête de rebroussement de la surface polaire est donné par les trois équations :

$$\Sigma\alpha(X - x) = 0,$$
$$\Sigma\alpha'(X - x) - R = 0,$$
$$\Sigma \frac{d\alpha'}{ds}(X - x) - \Sigma\alpha' \frac{dx}{ds} - \frac{dR}{ds} = 0.$$

La dernière devient, en tenant compte de la première :

$$\frac{1}{T} \Sigma\alpha''(X - x) + \frac{dR}{ds} = 0$$

On obtient, dès lors, en prenant les axes de Serret :

$$X = 0, \quad Y = R, \quad Z = -T \frac{dR}{ds}.$$

Ce sont les coordonnées du centre de la sphère osculatrice (voir § 9).

Donc *le point où la droite polaire touche son enveloppe est le centre de la sphère osculatrice à la courbe* (C). *La courbe* (C) *est trajectoire orthogonale des plans osculateurs au lieu des centres de ses sphères osculatrices.*

CHAPITRE II

SURFACES

Le ds^2 de la surface et les angles

1. — *Courbes tracées sur une surface. Longueurs d'arc et angles.* — Soit une surface (S) dont nous supposerons les coordonnées d'un point courant exprimées en fonction de deux paramètres u, v :

$$(\mathrm{S}) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v)\,;$$

u, v sont les *coordonnées curvilignes* d'un point de la surface (S). On définira une courbe (C) de la surface en établissant une relation entre u, v ; ou, ce qui revient au même, en exprimant u, v en fonction d'un même paramètre t :

$$(\mathrm{C}) \qquad u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t).$$

La tangente à cette courbe a pour paramètres directeurs :

$$(1) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\,;$$

la tangente est donc déterminée par les différentielles du, dv.

L'élément d'arc a pour expression :

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du dv + \mathrm{G}dv^2 = \Phi(du, dv)$$

en posant :

$$\mathrm{E} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{F} = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \mathrm{G} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Considérons deux courbes passant par un même point (u, v) de la surface ; soient du, dv les différentielles correspondant à l'une d'elles ; δu, δv celles qui correspondent à l'autre ; ds, δs les différentielles des arcs correspondants. Si V est l'angle des deux courbes, nous savons que :

$$\cos \mathrm{V} = \frac{\Sigma dx.\delta x}{ds.\delta s}\,;$$

or :

$$\Sigma dx.\delta x = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) =$$
$$= \mathrm{E}du\delta u + \mathrm{F}(du\delta v + dv\delta u) + \mathrm{G}dv\delta v\,;$$

c'est la forme polaire de la forme quadratique $\Phi(du, dv)$ et :

$$(3) \qquad \cos \mathrm{V} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta u\dfrac{\partial\Phi(du, dv)}{\partial.du} + \delta v\dfrac{\partial\Phi(du, dv)}{\partial.dv}}{\sqrt{\Phi(du, dv)\Phi(\delta u, \delta v)}}\,.$$

Pour que les deux courbes soient orthogonales, il faut et il suffit que $\cos \mathrm{V} = o$, ou :

$$(4) \qquad \mathrm{E}du.\delta u + \mathrm{F}(du.\delta v + dv.\delta u) + \mathrm{G}.dv.\delta v = o.$$

En particulier, cherchons à quelle condition les *courbes coordonnées* $u = \mathrm{C}^{te}$ et $v = \mathrm{C}^{te}$ forment un *réseau orthogonal*; alors $dv = o$, $\delta u = o$, la condition précédente se réduit à l'identité :

$$\mathrm{F}du\delta v = o,$$

ou comme du, δv ne sont pas constamment nuls, $\mathrm{F} = o$. Dans ce cas, le carré de l'élément d'arc prend la forme caractéristique :

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2.$$

Remarque. — Si on définit la surface par une équation de la forme :

$$z = f(x,y).$$

en désignant comme d'habitude par p, q les dérivées partielles de z par rapport à x, y :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1+q^2)dy^2$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{E} = 1 + p^2, \qquad \mathrm{F} = pq, \qquad \mathrm{G} = 1 + q^2.$$

Déformation et représentation conforme

2. — *Surfaces applicables. Représentations conformes.* — Considérons deux surfaces (S), (S_1) :

$$(\mathrm{S}) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v)$$
$$(\mathrm{S}_1) \qquad x = f_0(u_1, v_1), \qquad y = g_0(u_1, v_1), \qquad z = h_0(u_1, v_1).$$

On peut établir une correspondance point par point entre ces deux surfaces, et cela d'une infinité de manières. Il suffit de poser :

$$u_1 = \varphi(u, v), \qquad v_1 = \psi(u, v),$$

les fonctions φ, ψ étant quelconques, à condition toutefois que les équations précédentes soient résolubles en u, v. Les équations de la surface (S_1) sont alors de la forme :

$$(S_1) \qquad x = f_1(u,v), \qquad y = g_1(u,v), \qquad z = h_1(u,v);$$

ce qui revient à dire que les points homologues correspondent aux mêmes systèmes de valeurs des paramètres.

Soient alors les éléments d'arcs sur ces deux surfaces :

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du.dv + \mathrm{G}dv^2$$

$$(2) \qquad ds_1{}^2 = \mathrm{E}_1du^2 + 2\mathrm{F}_1du.dv + \mathrm{G}_1dv^2.$$

Supposons ces éléments d'arc identiques, $\mathrm{E} \equiv \mathrm{E}_1$, $\mathrm{F} \equiv \mathrm{F}_1$, $\mathrm{G} \equiv \mathrm{G}_1$. Si alors u,v sont exprimés en fonction d'un paramètre t, les arcs des deux courbes correspondantes des deux surfaces compris entre des points correspondants ont tous deux pour expression :

$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{C}dv^2}$; t_0, t_1 étant les valeurs de t qui correspondent aux extrémités. Réciproquement, si deux arcs homologues quelconques de deux courbes homologues quelconques tracées sur les deux surfaces ont même longueur, les éléments d'arc (1) et (2) sont identiques lorsqu'on y remplace u et v par des fonctions arbitraires de t ; et, par suite, sont identiques en u, v, du, dv. On dit alors que les deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre, ou se déduisent l'une de l'autre par *déformation*.

Dans cette correspondance, la fonction Φ étant la même pour les deux surfaces, la formule (3) du n° 1 montre que les angles se conservent. Mais la réciproque n'est pas vraie. L'expression de $\cos \mathrm{V}$ est homogène et de degré zéro en E, F, G ; pour que les angles de deux courbes homologues quelconques soient égaux, il faut et il suffit que :

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}_1} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}_1} = \chi(u, v),$$

ce rapport étant indépendant de du, dv, δu, δv. On dit dans ce cas qu'il y a *représentation conforme* des deux surfaces l'une sur l'autre.

Problème de la représentation conforme

Etant données deux surfaces, il est toujours possible d'établir entre elles une représentation conforme. Ceci revient à dire que l'on peut exprimer u_1, v_1 en fonction de u, v de telle sorte que :

$$E du^2 + 2F du.dv + G dv^2 \equiv \chi(u, v)(E_1 du^2 + 2F_1 du.dv + G_1 dv^2).$$

Décomposons les deux ds^2 en facteurs du premier degré. Remarquons que $EG - F^2$ est la somme des carrés des déterminants déduits du tableau :

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix};$$

$EG - F^2$ est positif pour toute surface réelle. Posons :

$$EG - F^2 = H^2;$$

alors :

$$ds^2 = E\left(du + \frac{F + iH}{E} dv\right)\left(du + \frac{F - iH}{E} dv\right);$$

chacun des facteurs du deuxième membre admet un facteur intégrant, donc :

$$du + \frac{F + iH}{E} dv \equiv M(u, v) d\alpha(u, v),$$

$$du + \frac{F - iH}{E} dv \equiv N(u, v) d\beta(u, v).$$

Les fonctions α, β sont indépendantes ; en effet, $d\alpha$ et $d\beta$ ne peuvent s'annuler en même temps si $H \neq O$, ce que nous supposons. Nous pouvons donc prendre α, β comme coordonnées curvilignes sur la première surface, et nous avons [Cf. Ch. III, § 4] :

$$ds^2 = P(u, v) d\alpha.d\beta = \Theta(\alpha, \beta) d\alpha.d\beta.$$

De même pour la deuxième surface :

$$ds_1^2 = P_1(u_1, v_1) d\alpha_1. d\beta_1 = \Theta_1(\alpha_1, \beta_1) d\alpha_1. d\beta_1,$$

α_1, β_1 étant deux fonctions de u_1, v_1 indépendantes.

Nous aurons alors à satisfaire à l'identité :

$$\Theta(\alpha, \beta) d\alpha.d\beta \equiv \Omega(\alpha, \beta)\Theta_1(\alpha_1, \beta_1) d\alpha_1.d\beta_1,$$

Ω, α_1, β_1 étant des fonctions inconnues de α, β.

Donc pour $d\alpha = 0$, on doit avoir $d\alpha_1.d\beta_1 = 0$. Si nous prenons $d\alpha_1 = 0$, α_1 sera fonction de α et de même β_1 sera fonction de β :

$$\alpha_1(u_1, v_1) = \varphi(\alpha(u, v)), \qquad \beta_1(u_1, v_1) = \psi(\beta(u, v)).$$

En prenant $d\beta_1 = 0$, β_1 sera fonction de α et de même α_1, de β :

$$\beta_1(u_1, v_1) = \varphi(\alpha(u, v)), \qquad \alpha_1(u_1, v_1) = \psi(\beta(u, v)).$$

On voit donc que l'on peut toujours établir une représentation conforme; car, dans les deux cas, quelles que soient les fonctions φ et ψ, $\Theta_1(\alpha_1, \beta_1)\, d\alpha_1.d\beta_1$ sera bien proportionnel à $\Theta(\alpha, \beta)\, d\alpha.d\beta$. Et nous avons de plus la solution générale de ce problème, les fonctions φ et ψ étant arbitraires.

Condition pour que deux surfaces soient applicables

Deux surfaces données ne sont pas en général applicables l'une sur l'autre. — Autrement dit, étant données deux surfaces, il est en général impossible d'établir entre elles une correspondance telle que $ds^2 = ds_1^2$. En effet, en reprenant le calcul précédent, il faudrait satisfaire à la relation :

$$\Theta(\alpha, \beta) d\alpha.d\beta \equiv \Theta_1(\alpha_1, \beta_1) d\alpha_1 d\beta_1 ;$$

il faudrait comme précédemment, prendre par exemple :

$$\alpha_1 = \varphi(\alpha) \qquad \beta_1 = \psi(\beta) ;$$

et la relation à vérifier deviendrait :

$$\Theta(\alpha, \beta) \equiv \Theta_1(\varphi(\alpha), \psi(\beta))\varphi'(\alpha)\psi'(\beta) ;$$

il est facile de voir que, les fonctions Θ, Θ_1 étant données, il est impossible, en général, de trouver des fonctions φ, ψ satisfaisant à cette relation. Considérons, en effet, le cas particulier où la deuxième surface est le plan $z = 0$. Dans ce cas, $ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = d\alpha_1.d\beta_1$ et on devrait avoir :

$$\Theta(\alpha, \beta) = \varphi'(\alpha)\psi'(\beta),$$

or la fonction Θ, étant quelconque, n'est pas le produit d'une fonction de α par une fonction de β.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\log \Theta(\alpha, \beta) = \log \varphi'(\alpha) + \log \varphi'(\beta),$$

ou :

$$\frac{\partial^2 \log \Theta(\alpha, \beta)}{\partial\alpha . \partial\beta} = 0.$$

Nous venons ainsi de montrer qu'une surface n'est pas en général applicable sur un plan et de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit applicable sur un plan. Nous y reviendrons plus loin (Ch. IV, § 3).

Les directions conjuguées et la forme : $\Sigma l d^2 x$

3. — *Développables circonscrites. Directions conjuguées.* — Corrélativement aux courbes tracées sur la surface, lieux de ∞^1 points de la surface, nous considérerons les développables circonscrites, enveloppes de ∞^1 plans tangents à la surface. Définissons le plan tangent en un point de la surface. Soient l, m, n les coefficients directeurs de la normale, et supposons les coordonnées rectangulaires. Pour toute courbe de la surface :

$$l dx + m dy + n dz = 0 ;$$

en particulier, pour les courbes coordonnées, $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$, nous aurons :

$$l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial y}{\partial u} + n \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$l \frac{\partial x}{\partial v} + m \frac{\partial y}{\partial v} + n \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

et ces relations montrent que l, m, n sont proportionnels aux déterminants fonctionnels A, B, C :

$$(1) \quad A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \qquad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} ;$$

nous avons vu d'ailleurs que :

$$A^2 + B^2 + C^2 = H^2 ;$$

donc les cosinus directeurs de la normale sont :

$$(2) \qquad \lambda = \frac{A}{H}, \qquad \mu = \frac{B}{H}, \qquad \nu = \frac{C}{H},$$

la direction positive ainsi définie dépendant du signe adopté pour H.

Considérons une développable circonscrite ; nous la définirons en exprimant u, v en fonction d'un paramètre t :

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t) ;$$

alors le point (u, v) décrit une courbe (C) de la surface, et les plans tangents à la surface aux divers points de (C) enveloppent la développable considérée. Le plan tangent à la surface au point (x,y,z) est, X,Y,Z étant les coordonnées courantes.

$$l.(X - x) + m.(Y - y) + n.(Z - z) = 0\,;$$

la caractéristique est définie par l'équation précédente et par l'équation :

$$dl.(X - x) + dm.(Y - y) + dn.(Z - z) = 0$$

obtenue en différentiant la précédente par rapport à t, et remarquant que :

$$ldx + mdy + ndz = 0.$$

Voyons quelle est la direction de cette caractéristique. Soient δx, δy, δz ses coefficients de direction. Elle est tangente à la surface, donc on peut choisir δu, δv de manière que :

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v. \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v, \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\delta v\,; \end{aligned}\right.$$

et en remplaçant $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ par les quantités proportionnelles δx, δy, δz, on obtient :

$$dl.\delta x + dm.\delta y + dn.\delta z = 0.$$

Or :

$$\left\{\begin{aligned} dl &= \frac{\partial l}{\partial u}du + \frac{\partial l}{\partial v}dv, \\ dm &= \frac{\partial m}{\partial u}du + \frac{\partial m}{\partial v}dv, \\ dn &= \frac{\partial n}{\partial u}du + \frac{\partial n}{\partial v}dv\,; \end{aligned}\right.$$

et la relation précédente s'écrit :

$$\Sigma\left(\frac{\partial l}{\partial u}du + \frac{\partial l}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) = 0.$$

Ordonnons par rapport à du, dv, δu, δv. Remarquons que :

$$\Sigma l\frac{\partial x}{\partial u} = 0\,;$$

d'où en dérivant par rapport à u et v :

$$\Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \Sigma \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \Sigma \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

De même, la relation :

$$\Sigma l \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

donne :

$$\Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \Sigma \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

et :

$$\Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \Sigma \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0\,;$$

de sorte que la relation cherchée s'écrit :

$$(3) \qquad \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du.\delta u + \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(du.\delta v + dv.\delta u) + \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv.\delta v = 0.$$

Telle est la relation qui existe entre les coefficients de direction de la caractéristique et de la tangente à la courbe de contact. Elle serait visiblement la même en coordonnées obliques, l, m, n étant alors les coefficients de l'équation du plan tangent. Posons :

$$(4) \qquad E' = \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad F' = \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \qquad G' = \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

et :

$$(5) \qquad \Psi(du, dv) = E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2.$$

La relation trouvée s'écrira, avec ces notations :

$$E'.du\delta u + F'.(du\delta v + dv\delta u) + G'.dv\delta v = 0,$$

ou :

$$(6) \qquad \frac{\partial \Psi(du, dv)}{\partial du}\delta u + \frac{\partial \Psi(du, dv)}{\partial dv}\delta v = 0.$$

Cette relation, dont le premier membre est la forme polaire de la forme Ψ, est symétrique par rapport à d, δ ; *il y a donc réciprocité entre la direction de la tangente à la courbe de contact de la développable et la direction de la caractéristique du plan tangent à cette développable.* Ces deux directions sont dites *directions conjuguées.*

Cherchons en particulier la condition pour que les courbes $u = C^{te}$, $v = C^{te}$ forment un *réseau conjugué*, c'est-à-dire pour que leurs tangentes, en chaque point de la surface, aient des directions conjuguées. Alors $dv = 0$, $\delta u = 0$: la condition est donc que l'on ait l'identité $F' = 0$.

Remarque 1. — De la relation :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

on tire :

$$d^2x = \frac{\partial x}{\partial u} d^2u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2.$$

D'autre part :

$$\Sigma l \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma l \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

On en conclut :

$$\Sigma l d^2 x = \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(du, dv) \equiv \Sigma l d^2 x.$$

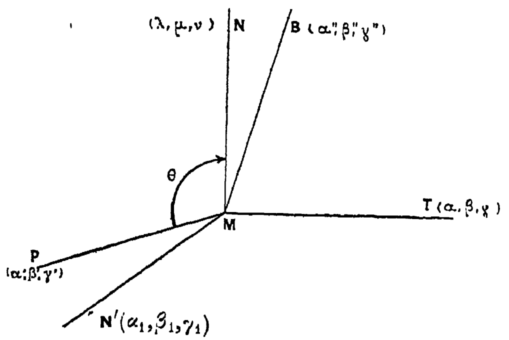
Remarque 2. — Si on prend, en particulier, $l = A$, $m = B$, $n = C$, la forme Ψ sera identique à $\Sigma A d^2 x$, et ses coefficients s'écriront sous forme de déterminants :

$$= \Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad F' = \Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad G' = \Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Formules fondamentales pour une courbe de la surface

4. — *Eléments fondamentaux d'une courbe de la surface.* — Nous considérerons en un point de la courbe le trièdre de Serret, et un trièdre constitué par la tangente à la courbe, la normale MN à la surface, et la tangente MN' à la surface qui est normale à la courbe. Nous

choisirons les directions positives de telle façon que le trièdre M.TN'N ainsi constitué ait même disposition que le trièdre de coordonnées, de sorte que si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale à la surface, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ceux de la tangente à la surface normale à la courbe, on aura :



$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1.$$

Les deux trièdres considérés ont un axe commun et de même direction, qui est la tangente. Pour les définir l'un par rapport à l'autre, il suffira de se donner l'angle d'une des arêtes de l'un avec l'une des arêtes de l'autre. Nous nous donnerons l'angle $\theta = (MP, MN)$ dont il faut faire tourner la demi-normale principale MP pour l'amener à coïncider avec la demi-normale à la surface MN, le sens positif des rotations étant défini par la direction positive MT de l'axe de rotation.

Cherchons les relations qui existent entre les cosinus directeurs des arêtes de ces trièdres. Quand on passe de l'un à l'autre, on fait en réalité une transformation de coordonnées autour de l'origine dans le plan normal. Considérons le point à l'unité de distance de M sur MN. Ses coordonnées sont λ, μ, ν. Rapporté au système PMB il a pour coordonnées $\cos\theta$ et $\sin\theta$, donc :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \alpha' \cos\theta + \alpha'' \sin\theta, \\ \mu &= \beta' \cos\theta + \beta'' \sin\theta, \\ \nu &= \gamma' \cos\theta + \gamma'' \sin\theta ; \end{aligned} \right.$$

de même le point à l'unité de distance sur MN', de coordonnées $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, rapporté au système PMB, a pour coordonnées $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$ et $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$, donc :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha' \sin\theta - \alpha'' \cos\theta, \\ \beta_1 &= \beta' \sin\theta - \beta'' \cos\theta, \\ \gamma_1 &= \gamma' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta ; \end{aligned} \right.$$

Donc encore, en faisant la transformation de coordonnées inverse :

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha' &= \lambda \cos\theta + \alpha_1 \sin\theta, \\
\beta' &= \mu \cos\theta + \beta_1 \sin\theta, \\
\gamma' &= \nu \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta; \\
\alpha'' &= \lambda \sin\theta - \alpha_1 \cos\theta, \\
\beta'' &= \mu \sin\theta - \beta_1 \cos\theta, \\
\gamma'' &= \nu \sin\theta - \gamma_1 \cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Différentions les formules (1) par rapport à s; nous obtenons :

$$\frac{d\lambda}{ds} = (-\alpha' \sin\theta + \alpha'' \cos\theta)\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta \frac{d\alpha'}{ds} + \sin\theta \frac{d\alpha''}{ds}$$

et les analogues ;

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = (\alpha' \cos\theta + \alpha'' \sin\theta)\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta \frac{d\alpha'}{ds} - \cos\theta \frac{d\alpha''}{ds}$$

et les analogues ;
d'où, en tenant compte des formules de Frenet et des relations (1), (2) :

$$(3) \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \alpha_1\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right) - \alpha \frac{\cos\theta}{R}$$

et les analogues ; et, de même,

$$(4) \qquad \frac{d\alpha_1}{ds} = -\lambda\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right) - \alpha \frac{\sin\theta}{R}$$

et les analogues ;
Enfin :

$$(5) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R} = \lambda \frac{\cos\theta}{R} + \alpha_1 \frac{\sin\theta}{R}$$

et les analogues ;
les formules fondamentales (3), (4), (5) *vont permettre de calculer* θ, R, T, *c'est-à-dire de déterminer le plan osculateur, la courbure et la torsion de la courbe considérée.*

Calcul de $\frac{\cos\theta}{R}$

Les formules (5) nous donnent d'abord :

$$\frac{\cos\theta}{R} = \Sigma\lambda \frac{d\alpha}{ds} = \Sigma\lambda \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = \Sigma\lambda \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3} = \frac{\Sigma\lambda d^2x}{ds^2} = \frac{\Sigma A d^2x}{H ds^2};$$

donc, d'après le calcul du paragraphe précédent, et en posant comme à la fin de ce paragraphe :

$$E' = \Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad F' = \Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad G' = \Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

on obtient :

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{H} \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{ds^2},$$

ou enfin :

$$(6) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{H} \cdot \frac{\Psi(du, dv)}{\Phi(du, dv)}.$$

Calcul de $\frac{\sin\theta}{R}$

Les formules (5) donnent encore :

$$\frac{\sin\theta}{R} = \Sigma\alpha_1 \frac{d\alpha}{ds} = \Sigma\alpha_1 \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = \Sigma\alpha_1 \frac{ds d^2x - dx d^2s}{ds^3} = \frac{\Sigma\alpha_1 d^2x}{ds^2}.$$

Remarquons que :

$$\frac{\Sigma\alpha_1 d^2x}{ds^2} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^3}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix};$$

pour calculer le dernier déterminant, multiplions-le par :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = A\lambda + B\mu + C\nu = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{H} = H;$$

le produit est :

$$\begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}dx & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}dx & \Sigma\lambda dx \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}d^2x & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}d^2x & \Sigma\lambda d^2x \\ \Sigma\lambda\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\lambda\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}dx & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}dx & 0 \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}d^2x & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}d^2x & \Sigma\lambda d^2x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}dx & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}dx \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}d^2x & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}d^2x \end{vmatrix}.$$

Or :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \cdot dx = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) = \mathrm{E}du + \mathrm{F}dv,$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dx = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) = \mathrm{F}du + \mathrm{G}dv,$$

Et :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} d^2x = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} d^2u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2\right)$$

$$= \mathrm{E}d^2u + \mathrm{F}d^2v + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} du.dv + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right) dv^2,$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} d^2x = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} d^2u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2\right)$$

$$= \mathrm{F}d^2u + \mathrm{G}d^2v + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right) du^2 + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} du dv + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} dv^2.$$

Le produit précédent s'écrit donc :

$$-\begin{vmatrix} \mathrm{E}d^2u + \mathrm{F}d^2v + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right) dv^2 & \mathrm{E}du + \mathrm{F}dv \\ \mathrm{F}d^2u + \mathrm{G}d^2v + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right) du^2 + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} du dv + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} dv^2 & \mathrm{F}du + \mathrm{G}dv \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est la somme de deux déterminants, dont le premier est :

$$-\begin{vmatrix} \mathrm{E}d^2u + \mathrm{F}d^2v & \mathrm{E}du + \mathrm{F}dv \\ \mathrm{F}d^2u + \mathrm{G}d^2v & \mathrm{F}du + \mathrm{G}dv \end{vmatrix} = \mathrm{H}^2(du.d^2v - dv.d^2u),$$

et finalement :

$$(7) \quad \frac{\sin \theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{H}ds^3} \Bigg[\mathrm{H}^2(du d^2v - dv.d^2u) -$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right) dv^2 & \mathrm{E}du + \mathrm{F}dv \\ \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right) du^2 + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} du dv + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} dv^2 & \mathrm{F}du + \mathrm{G}dv \end{vmatrix} \Bigg]$$

Calcul de $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$

Enfin la formule (4) nous donne :

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \Sigma\alpha_1 \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{ds} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\lambda & d\mu & d\nu \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d\lambda & d\mu & d\nu \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

pour calculer le déterminant, nous le multiplierons encore par le même déterminant H. Le produit sera :

$$\begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} dx & \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} dx & \Sigma\lambda dx \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} d\lambda & \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} d\lambda & \Sigma\lambda d\lambda \\ \Sigma\lambda \frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\lambda \frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv & 0 \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} d\lambda & \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} d\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

D'ailleurs on tire de

$$\Sigma\lambda \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

en différentiant :

$$\Sigma d\lambda \frac{\partial x}{\partial u} = -\Sigma\lambda\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv\right) = -\frac{1}{H}(E' du + F' dv);$$

de même :

$$\Sigma d\lambda \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{H}(F' du + G' dv)$$

le produit est donc :

$$-\frac{1}{H} \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ E' du + F' dv & F' du + G' dv \end{vmatrix},$$

et :

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{H^2 ds^2} \begin{vmatrix} E'du + F'dv & Edu + Fdv \\ F'du + G'dv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Les trois formules (6), (7), (8) permettent de calculer les trois éléments fondamentaux θ, R, T.

Interprétation cinématique

Les éléments auxiliaires :

$$-\Sigma\alpha_1 \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}, \quad -\Sigma\lambda \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\cos\theta}{R}, \quad \Sigma\alpha_1 \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\theta}{R}$$

s'offrent d'eux-mêmes comme les composantes, suivant les axes MT, MN′, MN, de la rotation instantanée du trièdre M.TN′N, lorsque le point M décrit la courbe (C) avec la vitesse + 1.

En même temps que ce trièdre, considérons le trièdre trirectangle introduit par M. Darboux.

Soit MO une direction du plan tangent, choisie, indépendamment de toute courbe (C), en chaque point M (u, v) de la surface, suivant une loi arbitraire mais continue ; et soit MO′ la direction du plan tangent qui achève, avec MO et la normale MN, un trièdre trirectangle M.OO′N ayant même disposition que le trièdre de coordonnées. C'est ce trièdre que nous considérerons.

Les cosinus directeurs λ_0, μ_0, ν_0 de MO, et λ'_0, μ'_0, ν'_0 de MO′ étant des fonctions de (u, v), la projection de la rotation instantanée de ce trièdre sur MN, lorsque M décrit la courbe (C) avec la vitesse + 1, est de la forme :

$$\Sigma\lambda'_0 \frac{d\lambda_0}{ds} = \frac{r du + r_1 dv}{ds},$$

r et r_1 étant des fonctions de u, v.

Or, si on désigne par φ_0 l'angle (MO, MT), évalué en grandeur et en signe dans le plan tangent orienté par MN, le mouvement relatif instantané du trièdre M.TN′N par rapport au trièdre M.OO′N est une rotation représentée par un vecteur, de valeur algébrique $\frac{d\varphi}{ds}$, porté par MN. Ce vecteur est la différence géométrique de ceux qui repré-

sentent les rotations instantanées des deux trièdres ; on a donc, en projetant sur MN cette équipollence :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin\theta}{R} - \frac{rdu + r_1 dv}{ds},$$

ce qu'on peut écrire :

$$(9) \qquad \frac{\sin\theta}{R}\, ds - d\varphi_0 = rdu + r_1 dv.$$

L'élément géométrique $\left(\frac{\sin\theta}{R}\, ds - d\varphi_0\right)$ *est donc une forme linéaire en du, dv.*

Il serait facile de la calculer en particularisant le choix de la direction auxiliaire origine MO (Cf. ch. IV § 5).

CHAPITRE III

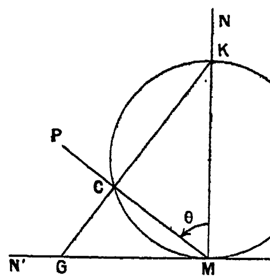
ÉTUDE DES ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX DES COURBES D'UNE SURFACE

Courbure normale

1. — Reprenons la première formule fondamentale :

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{H}\,\frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

les différentielles secondes d^2u, d^2v n'y figurent pas ; $\frac{\cos\theta}{R}$ ne dépend que du rapport $\frac{dv}{du}$, c'est-à-dire de la direction de la tangente. Donc $\frac{\cos\theta}{R}$ *est le même pour toutes les courbes de la surface tangentes à une même droite*. Considérons alors le centre de courbure C sur la normale principale MP ; si on prend pour pôle le point M, pour axe polaire la normale MN à la surface, et pour sens positif des angles polaires le sens de MN vers MN′, R,θ sont les coordonnées polaires du point C. L'équation :



$$\frac{\cos\theta}{R} = c^{te},$$

représente un cercle ; *le lieu du point C est un cercle*, ce qu'on peut encore voir comme il suit : considérons la droite polaire, elle est dans le plan normal à la courbe, donc elle rencontre la normale MN à la surface en un point K tel que :

$$R = MK\cos\theta,$$

d'où :

$$MK = \frac{R}{\cos\theta},$$

MK est constant, donc *les droites polaires de toutes les courbes d'une surface passant par un même point* M *de cette surface et tangentes en ce point à une même droite rencontrent en un même point* K *la normale en* M *à la surface. Le lieu des centres de courbure de toutes ces courbes est le cercle de diamètre* MK *(cercle de Meusnier)*. En particulier, supposons $\theta = 0$: la normale principale se confond avec la normale à la surface, le plan osculateur passe par la normale, il est normal à la surface. Coupons la surface par ce plan, K est le centre de courbure en M de la section ; soit R_n le rayon de courbure, nous avons :

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{R_n},$$

ce qui conduit à donner à l'élément géométrique $\frac{\cos\theta}{R}$ le nom de *courbure normale*. On en conclut

$$R = R_n \cos\theta.$$

D'où le *Théorème de Meusnier : le centre de courbure en* M *d'une courbe tracée sur une surface est la projection sur le plan osculateur en* M *à cette courbe du centre de courbure de la section normale tangente en* M *à la courbe.*

Le théorème est en défaut si :

$$\Psi(du, dv) = E'du^2 + 2F'du.dv + G'.dv^2 = 0.$$

Alors $\frac{\cos\theta}{R} = 0$, R est en général infini. La formule devient complètement indéterminée si en même temps $\cos\theta = 0$; alors la normale principale est perpendiculaire à la normale à la surface, le plan osculateur à la courbe est tangent à la surface. Les deux tangentes qui correspondent à ce cas d'exception s'appellent *les deux directions asymptotiques* ou les *tangentes asymptotiques* correspondant au point M considéré.

Le théorème est également en défaut si :

$$\Phi(du, dv) = Edu^2 + 2F.du.dv + Gdv^2 = 0\,;$$

alors $\frac{\cos\theta}{R}$ est infini, R est nul en général (Cf. § 4). La direction de la tangente est telle que :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

c'est une des deux droites isotropes qui passent en M dans le plan tangent en M.

Remarque. — Comme du, dv sont, en fait, des coordonnées homogènes pour la direction correspondante dx, dy, dz du plan tangent, on vérifie que la *condition d'orthogonalité de deux tangentes*

(p. 20, équ. (4)) exprime bien qu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes du plan tangent. De même la *condition pour que deux tangentes soient conjuguées* (p. 26, équ (6)) exprime qu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes asymptotiques.

Variations de la courbure normale

2. — Le théorème de Meusnier nous montre que, pour étudier la courbure des diverses courbes d'une surface passant par un point de cette surface, il suffit de considérer les sections normales passant par les différentes tangentes à la surface au point considéré.

Nous avons vu plus haut que :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{H}\,\frac{E'du^2 + 2F'du.dv + G'dv^2}{E.du^2 + 2F du.dv + G.dv^2}\,.$$

Traçons dans le plan tangent en M les tangentes MU, MV aux courbes coordonnées $v = C^{te}$ et $u = C^{te}$ qui passent par M, et considérons le trièdre constitué par MU, MV et la normale MN à la surface : les cosinus directeurs des axes sont, si on choisit pour directions positives, sur MU et MV, le sens des u croissants et le sens des v croissants, respectivement,

$$\begin{array}{llll}
\text{MU :} & \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} = \lambda', & \dfrac{1}{\sqrt{E}}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \mu', & \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial z}{\partial u} = \nu'. \\
\text{MV :} & \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} = \lambda'', & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} = \mu'', & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial z}{\partial v} = \nu'', \\
\text{MN :} & \lambda \qquad\qquad\qquad\qquad , & \mu \qquad , & \nu \qquad .
\end{array}$$

Considérons alors une tangente MT quelconque, définie par les valeurs du, dv des différentielles des coordonnées u, v. Les cosinus directeurs sont :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\cdot\lambda' + \sqrt{G}\cdot\frac{dv}{ds}\lambda'', \\
\frac{dy}{ds} &= \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\cdot\mu' + \sqrt{G}\cdot\frac{dv}{ds}\mu'', \\
\frac{dz}{ds} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\cdot\nu' + \sqrt{G}\cdot\frac{dv}{ds}\nu''.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules montrent que le segment directeur de MT est la somme géométrique de deux segments, de valeurs algébriques :

$$P = \sqrt{E}\frac{du}{ds}, \qquad Q = \sqrt{G}\frac{dv}{ds},$$

portés respectivement sur MU et MV. En d'autres termes, P, Q sont les paramètres directeurs de MT dans le système de coordonnées UMV.

La formule qui donne R_n devient, en y introduisant ces paramètres directeurs :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{H}\left[E'\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F'\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + G'\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{H}\left[\frac{E'}{E}P^2 + \frac{2F'}{\sqrt{EG}}PQ + \frac{G'}{G}Q^2\right].$$

Si on considère le point obtenu en portant sur MT, à partir de M, un segment égal à $\pm\sqrt{|R_n|}$, le lieu de ce point, dont les coordonnées, dans le système MUV, sont :

$$U = \pm P\sqrt{|R_n|}, \qquad V = \pm Q\sqrt{|R_n|},$$

aura pour équation :

$$\frac{E'}{E}U^2 + \frac{2F'}{\sqrt{EG}}UV + \frac{G'}{G}V^2 = H.$$

C'est une conique à centre située dans le plan tangent, qu'on appelle *indicatrice* de la surface au point M. La conique tracée, on a immédiatement, par le carré de la mesure du rayon vecteur, le rayon de courbure d'une section normale quelconque, et on suit sans peine la variation du rayon de courbure, quand MT varie.

La nature de l'indicatrice dépend du signe de $\frac{E'G' - F'^2}{E.G}$, ou, puisque E, G sont positifs, de $E'G' - F'^2$.

1° $E'G' - F'^2 > 0$, l'indicatrice est une ellipse, tous les rayons de courbure sont de même signe, on dit que la surface est *convexe* au point M ; elle est toute entière d'un même côté du plan tangent en M dans le voisinage du point M.

2° $E'G' - F'^2 < 0$, l'indicatrice est une hyperbole. La surface traverse au point M son plan tangent ; elle est dite *à courbures opposées* au point M.

3° $E'G' - F'^2 = 0$, l'indicatrice est du genre parabole, et comme elle est à centre, elle se réduit à un système de deux droites parallèles. Le point M est dit *point parabolique*.

Considérons le cas particulier où $\frac{1}{R_n}$ est constant, quelle que soit la section que l'on considère. Il faut et il suffit pour cela que $\frac{1}{R_n}$ soit indépendant de $\frac{du}{dv}$, donc que :

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}.$$

Or l'angle ω de MU avec MV est donné par la formule :

$$\cos \omega = \Sigma \lambda \lambda'' = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Les conditions précédentes s'écrivent donc :

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{F'}{\sqrt{EG}}}{\cos \omega} = \frac{G'}{G},$$

et expriment, comme il était évident *a priori*, que l'indicatrice est un cercle.

Le point M est dit alors un *ombilic*.

Remarque. — Dans le cas où l'équation de la surface est :

$$z = f(x, y),$$

en prenant les notations habituelles, l'élément d'arc a pour expression :

$$ds^2 = (1 + p^2).dx^2 + 2pq.dx.dy + (1 + q^2)dy^2,$$

d'où :

$$E = 1 + p^2 \qquad F = p.q \qquad G = 1 + q^2,$$

et :

$$H = \sqrt{E.G - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Maintenant les coefficients du plan tangent à la surface sont :

$$A = -p, \qquad B = -q, \qquad C = 1,$$

et :

$$\Sigma A.d^2x = -\Sigma dA.dx = dp.dx + dqdy.$$

Mais :

$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + t.dy,$$

donc :

$$\Sigma A.d^2x = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2;$$

d'où :

$$E' = r, \qquad F' = s, \qquad G' = t,$$

et :

$$E'G' - F'^2 = rt - s^2.$$

Sections principales

3. — Cherchons les directions des axes de l'indicatrice. Ce sont des directions conjuguées par rapport aux directions asymptotiques de l'indicatrice, définies par :

$$\Psi(du, dv) = 0$$

et par rapport aux directions isotropes du plan tangent, définies par :

$$\Phi(du, dv) = 0.$$

Elles sont donc définies par la condition :

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial du}}{\frac{\partial \Phi}{\partial du}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial dv}}{\frac{\partial \Phi}{\partial dv}} = \frac{\Psi(du, dv)}{\Phi(du, dv)} = \frac{H}{R} = S,$$

puisque du, dv sont des coordonnées homogènes pour les directions MT du plan tangent.

Ce sont les *directions principales*. Les rayons de courbure correspondants sont dits *rayons de courbure principaux*.

L'équation qui définit les directions principales est donc :

$$\begin{vmatrix} E.du + F.dv & F.du + G.dv \\ E'.du + F'.dv & F'.du + G'.dv \end{vmatrix} = 0 ;$$

le premier membre $\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(du, dv)}$ est un covariant simultané des formes Φ, Ψ.

L'équation aux rayons de courbure principaux s'obtiendra en éliminant du, dv entre les équations :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial du} = S \frac{\partial \Phi}{\partial du}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial dv} = S \frac{\partial \Phi}{\partial dv},$$

ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} E' - SE & F' - SF \\ F' - SF & G' - SG \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$S^2(E.G - F^2) - S(E.G' + G.E' - 2FF') + E'G' - F'^2 = 0,$$

avec :

$$S = \frac{H}{R}.$$

Formule d'Euler. — Supposons maintenant que les courbes coordonnées soient tangentes aux directions principales. Ces directions sont rectangulaires ; donc les courbes coordonnées constituent un réseau orthogonal, de plus l'indicatrice est rapportée à ses axes, donc :

$$F' = 0, \qquad H = \sqrt{EG},$$

et :

$$\frac{1}{R_n} = P^2 \frac{E'}{E\sqrt{EG}} + Q^2 \frac{G'}{G\sqrt{EG}}.$$

Si nous supposons $P = 1$, $Q = 0$, nous avons un des rayons de courbure principaux R_1 :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{E'}{E\sqrt{EG}}$$

pour $P = 0$, $Q = 1$, nous avons l'autre rayon de courbure principal R_2 :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{G'}{G\sqrt{EG}}$$

et la formule devient :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{P^2}{R_1} + \frac{Q^2}{R_2}.$$

Mais ici, les coordonnées étant rectangulaires, si φ est l'angle (MU, MT) de la tangente MT avec la direction principale MU, $P = \cos\varphi$, $Q = \sin\varphi$, et nous obtenons la *formule d'Euler* :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Considérons la tangente MT′ perpendiculaire à MT, il faudra remplacer φ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$, et nous obtiendrons :

$$\frac{1}{R'_n} = \frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2}$$

d'où :

$$\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R'_n} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

donc *la moyenne arithmétique des courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques est constante et égale à la moyenne arithmétique des courbures des sections normales principales.* Cette quantité constante $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ s'appelle *courbure moyenne* de la surface au point considéré.

Lignes minima

4. — En chaque point d'une surface, il y a dans le plan tangent trois couples de directions remarquables : les droites isotropes du plan tangent, définies par $\Phi(du, dv) = 0$; les directions asymptotiques de l'indicatrice, définies par $\Psi(du, dv) = 0$, et les directions principales, conjuguées harmoniques par rapport aux deux couples précédents, qui sont définies par $\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(du, dv)} = 0$.

Considérons les directions isotropes, et cherchons s'il existe sur la surface des courbes tangentes en chacun de leurs points à une direction isotrope ; ceci revient à intégrer l'équation différentielle :

$$\Phi(du, dv) = 0.$$

On obtient ainsi les *courbes minima* de la surface. L'équation précédente se décompose en deux équations du premier ordre, et du premier degré en $\frac{dv}{du}$; donc *il y a sur une surface deux familles de courbes minima, et par tout point de la surface passe en général une courbe et une seule de chaque famille.* Ces courbes sont imaginaires ; le long de chacune d'elles :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0\,;$$

c'est pourquoi on les appelle aussi *lignes de longueur nulle*. Si on les prend pour lignes coordonnées, l'équation $\Phi(du, dv) = 0$ devant alors être vérifiée pour $du = 0$ et pour $dv = 0$, on a, identiquement :

$$E = 0 \quad G = 0,$$

et l'élément d'arc se réduit à la forme caractéristique :

$$ds^2 = 2F du.dv.$$

Remarque. — Le calcul nécessaire pour rapporter, effectivement, la surface à ses lignes minima a été indiqué, incidemment, au Ch. II (p. 22). En général, deux familles distinctes de courbes de la surface étant définies par deux équations

$$\varphi(u,v) = \text{const.} \quad , \quad \psi(u,v) = \text{const.},$$

où φ et ψ sont des fonctions indépendantes, il suffit, pour prendre ces courbes comme courbes coordonnées, de faire, dans les équations (S) de la surface (p. 19), le changement de paramètres u,v défini par les formules :

$$u_1 = \varphi(u,v) \quad , \quad v_1 = \psi(u,v) \quad .$$

Développables isotropes. — Equations des courbes minima. — En général les deux systèmes de ligne minima sont distincts. Pour qu'ils soient confondus, il faut et il suffit que l'on ait identiquement :

$$EG - F^2 = H^2 = 0\,;$$

dans ce cas, $A^2 + B^2 + C^2 = 0$, et les formules fondamentales ne s'appliquent plus. Pour étudier la nature d'une telle surface, considérons le plan tangent :

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0\,;$$

ce plan est alors tangent à un cône isotrope, c'est un *plan isotrope*. *Tous les plans tangents à la surface sont isotropes.* Cherchons l'équation générale des plans isotropes. Soit :

$$ax + by + cz + d = 0$$

l'équation d'un tel plan : a, b, c sont liés par la condition :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0,$$

ou

$$(a + ib)(a - ib) = -c^2.$$

Posons :

$$a + ib = tc, \qquad a - ib = -\frac{1}{t}c,$$

ou :

$$a + ib - tc = 0, \qquad ta - ibt + c = 0\,;$$

de ces deux relations homogènes en a, b, c nous tirons :

$$\frac{a}{1 - t^2} = \frac{b}{i(1 + t^2)} = \frac{c}{-2t}\,;$$

d'où l'équation générale des plans isotropes :

$$(1)\qquad (1 - t^2)x + i(1 + t^2)y - 2tz + 2w = 0.$$

Un plan isotrope dépend de deux paramètres. La surface considérée est l'enveloppe de plans isotropes ; si ces plans dépendent de deux paramètres, elle se réduit au cercle imaginaire à l'infini. Supposons donc que w soit fonction de t par exemple ; le plan tangent ne dépendant que d'un paramètre, la surface est développable, c'est une *développable isotrope*. Cherchons son arête de rebroussement. Différentions l'équation (1) deux fois par rapport à t. Nous avons, en désignant par des accents les dérivées par rapport à t :

$$(2)\qquad -tx + ity - z + w' = 0,$$

$$(3)\qquad -x + iy + w'' = 0\,;$$

les équations (1) (2) (3) définissent l'arête de rebroussement ; (3) donne :

$$x - iy = w'',$$

(2) s'écrit :

$$z = -t(x - iy) + w' = w' - tw'',$$

et (1) devient :

$$x + iy = t^2(x - iy) + 2tz - 2w = t^2w'' + 2t(w' - tw'') - 2w;$$

d'où, pour les équations de l'arête de rebroussement :

(4) $\quad x - iy = w'', \quad x + iy = -2w + 2tw' - t^2w'', \quad z = w' - tw''.$

Nous en tirons :

$$d(x - iy) = w'''dt, \quad d(x + iy) = -t^2w'''dt, \quad dz = -tw'''dt;$$

d'où :

$$d(x - iy).d(x + iy) = -t^2w'''^2dt^2 = -dz^2$$

ou :

$$d(x - iy).d(x + iy) + dz^2 = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

la courbe trouvée est donc une courbe minima. *L'arête de rebroussement d'une développable isotrope est une courbe minima.*

Réciproquement, considérons une courbe minima. Les coordonnées x, y, z d'un de ses points sont telles que :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Différentions :

$$dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z = 0;$$

mais l'identité de Lagrange nous donne alors :

$$\Sigma dx^2\Sigma(d^2x)^2 - \Sigma dx.d^2x = \Sigma(dy.d^2z - dz.d^2y)^2 = 0,$$

c'est-à-dire, A, B, C désignant les coefficients du plan osculateur :

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Le plan osculateur en un point d'une courbe minima est isotrope. Toute courbe minima peut être considérée comme l'arête de rebroussement d'une développable isotrope.

Il en résulte que cette arête de rebroussement est la courbe minima la plus générale, et que les coordonnées d'un point d'une courbe minima quelconque sont données par les formules (4), où w est une fonction arbitraire de t, et w', w'' ses dérivées première et seconde.

Remarque. — Ces formules peuvent servir à l'étude des courbes

minima, la théorie classique de la courbure et de la torsion ne s'appliquant pas à ces courbes. — Observons à cette occasion que les *courbes planes situées dans des plans isotropes* sont également, au même point de vue, des courbes singulières.

Lignes asymptotiques

5. — Si nous cherchons maintenant les courbes d'une surface tangentes en chacun de leurs points à une asymptote de l'indicatrice, nous sommes ramenés à intégrer l'équation :

$$\Psi(du, dv) = 0, \tag{1}$$

et nous obtenons les *lignes asymptotiques*. Comme précédemment, nous voyons qu'*il y a deux familles de lignes asymptotiques, et par tout point de la surface passe en général une asymptotique de chaque famille et une seule.*

L'équation différentielle précédente s'écrit, d'après les remarques du § 3 du Ch. II (p. 27),

$$\Sigma A d^2x = 0.$$

D'ailleurs :

$$\Sigma A dx = 0 ;$$

mais A,B,C sont les coefficients du plan tangent à la surface ; l'équation (1) exprime donc qu'il contient, outre la direction dx, dy, dz, la direction d^2x, d^2y, d^2z, c'est-à-dire qu'il coïncide avec le plan osculateur à la courbe ; donc *les lignes asymptotiques sont définies par la condition que le plan osculateur en chacun de leurs points soit tangent à la surface.* En particulier, *toute génératrice rectiligne d'une surface est une ligne asymptotique*, car le plan osculateur en un point d'une droite étant indéterminé, peut être considéré comme coïncidant avec le plan tangent en ce point à la surface. *Si donc une surface est réglée, un des systèmes de lignes asymptotiques est constitué par les génératrices rectilignes.*

Si nous prenons les lignes asymptotiques pour courbes coordonnées, nous aurons, identiquement :

$$E' = G' = 0,$$

et la forme Ψ se réduira à la forme caractéristique :

$$\Psi(du, dv) = 2F' du.dv.$$

Les lignes asymptotiques sont réelles aux points où la surface est

à courbures opposées, imaginaires aux points où elle est convexe. Elles sont en général distinctes, et distinctes aussi des lignes minima. *Nous allons examiner les cas d'exception.*

1° *Les lignes asymptotiques sont confondues.* — Prenons l'équation de la surface sous la forme :

$$z = f(x, y) :$$

la condition pour que les deux familles de lignes asymptotiques soient confondues :

$$E'G' - F'^2 = 0,$$

se réduit ici à :

$$rt - s^2 = 0 ;$$

tous les points de la surface doivent être paraboliques. Cette équation exprime que les différentielles totales :

$$dp = rdx + sdy \quad , \quad dq = sdx + tdy$$

sont deux formes linéaires en dx et dy qui ne sont pas indépendantes, c'est-à-dire que les fonctions p et q de x et y sont fonctions de l'une d'entre elles, de p par exemple. Le plan tangent en un point a, d'autre part, pour équation :

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

ou :

$$pX + qY - Z = px + qy - z.$$

Mais :

$$d(px + qy - z) = x.dp + y.dq$$

et nous voyons que si $dp = 0$, puisque cette condition entraîne déjà $dq = 0$, on a en même temps $d(px + qy - z) = 0$, donc $px + qy - z$ est fonction de p, de même que q, et alors le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre, et la surface est développable. La réciproque est immédiate, car si l'équation $pX + qY - Z = px + qy - z$ ne dépend que d'un paramètre θ, dp et dq sont proportionnels à $d\theta$, et les deux formes linéaires $dp = r.dx + s.dy$, $dq = s.dx + t.dy$ ne sont pas indépendantes. On a donc bien :

$$\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0.$$

Donc *les surfaces à lignes asymptotiques doubles sont les surfaces développables, et les lignes asymptotiques doubles sont les génératrices rectilignes. Pour les développables isotropes, les lignes asymptotiques doubles sont confondues avec les lignes minima doubles, qui sont les génératrices rectilignes isotropes.*

Remarque. — Pour les surfaces développables, l'arête de rebroussement ayant son plan osculateur tangent à la surface doit être considérée comme une ligne asymptotique. C'est en effet une intégrale singulière de l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

2° *Une famille de lignes asymptotiques est confondue avec une famille de lignes minima.* — Ecartons le cas des développables isotropes, qui vient d'être examiné. Prenons les lignes minima comme courbes coordonnées; alors $E = 0$, $G = 0$; et si nous supposons que la famille $v = c^{te}$ constitue une famille d'asymptotiques, $dv = 0$ doit être solution de $\Psi(du, dv) = 0$, donc $E' = 0$, c'est-à-dire :

$$E' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe donc entre les éléments des lignes de ce déterminant une même relation linéaire et homogène, soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} &= M\frac{\partial y}{\partial u} + N\frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= M\frac{\partial z}{\partial u} + N\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ et ajoutons. Le coefficient de M est $E = 0$, celui de N est F, le premier membre est $\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = 0$: donc $NF = 0$, et comme $F \neq 0$, puisque les lignes minima sont distinctes, $N = 0$, de sorte que :

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\frac{\partial z}{\partial u}} = M.$$

Les courbes $v = c^{te}$ sont donc des droites, et, comme ce sont des lignes minima, ce sont des droites isotropes. Réciproquement, si les cour-

bes $v = c^{te}$ sont des droites, il existe une fonction **M** de u,v, telle que :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = M \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = M \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = M \frac{\partial z}{\partial u};$$

d'où :

$$\Sigma A \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = M.\Sigma A \frac{\partial x}{\partial u} = 0;$$

de sorte que les courbes $v = c^{te}$, qui sont des droites minima, sont des lignes asymptotiques. Donc *les surfaces qui ont une famille d'asymptotiques confondue avec une famille de lignes minima sont des surfaces réglées à génératrices isotropes, et ces génératrices sont les asymptotiques confondues avec des courbes minima.*

3° *Les deux systèmes d'asymptotiques sont des courbes minima.* — Alors les formes quadratiques Φ et Ψ sont proportionnelles et :

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}.$$

L'indicatrice en un point quelconque est un cercle, *tous les points de la surface sont des ombilics.* En prenant de nouveau les lignes minima comme courbes coordonnées, les conditions précédentes se réduisent à $E' = G' = 0$. En reprenant le calcul comme précédemment, on verra que la surface admet deux systèmes de génératrices rectilignes isotropes, et réciproquement. *C'est une sphère.*

Surfaces minima

6. — Ce dernier cas nous a conduit à étudier la surface telle que l'indicatrice soit toujours un cercle. Examinons maintenant le cas où *cette indicatrice est toujours une hyperbole équilatère.* Ceci revient à chercher les surfaces pour lesquelles les lignes asymptotiques sont orthogonales. Il faut et il suffit pour cela que :

$$EG' + GE' - 2FF' = 0,$$

ou :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0.$$

La courbure moyenne est nulle ; les rayons de courbure en chaque point sont opposés ; la surface est dite une *surface minima.*

Prenons pour coordonnées les lignes minima. Alors $E = 0$, $G = 0$, et :

$$ds^2 = 2F.du.dv\,;$$

la condition précédente donne $F' = 0$, et :

$$\Psi(du, dv) = E'du^2 + G'dv^2.$$

Mais :

$$F' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe donc une même relation linéaire et homogène entre les éléments des lignes, soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= M \frac{\partial x}{\partial u} + N \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} &= M \frac{\partial y}{\partial u} + N \frac{\partial y}{\partial v}\,. \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= M \frac{\partial z}{\partial u} + N \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

Multiplions respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ et ajoutons. Le premier membre est $\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = 0$; le coefficient de M est $E = 0$; celui de N est F ; donc $NF = 0$, et, puisque $F \neq 0, N = 0$. De même en multipliant par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ et ajoutant, on trouvera $M = 0$; donc :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Ce qui donne :

$$x = f(u) + \varphi(v),\ y = g(u) + \psi(v),\ z = h(u) + \chi(v)\,;$$

les surfaces représentées par des équations de cette forme sont dites *surfaces de translation. Elles peuvent être engendrées de deux*

manières différentes par la translation d'une courbe de forme invariable dont un point décrit une autre courbe. Considérons en effet sur la surface les quatre points $M_0(u_0,v_0)$, $M_1(u,v_0)$, $M_2(u_0,v)$, $M(u,v)$. D'après les formules précédentes, ces points sont les sommets d'un parallélogramme. Si, laissant v_0 fixe, on fait varier u, le point M_1 décrit une courbe (Γ) de la surface ; de même si, laissant u_0 fixe, on fait varier v, le point M_2 décrit une autre courbe (Γ') de la surface. Le point M_0 appartient à ces deux courbes. On peut donc considérer la surface comme engendrée par la courbe (Γ) animée d'un mouvement de translation dans lequel le point M_0 décrit la courbe (Γ'), ou par la courbe (Γ') animée d'un mouvement de translation dans lequel le point M_0 décrit la courbe Γ.

Pour les surfaces minima, les six fonctions f,g,h,φ,ψ,χ ne sont pas quelconques. Elles doivent satisfaire aux relations :

$$E = f'^2 + g'^2 + h'^2 = 0, \; G = \varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 0 ;$$

il en résulte que la courbe :

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u)$$

est une courbe minima, et si nous nous reportons aux équations générales d'une courbe minima, nous voyons que nous pouvons écrire, F étant une fonction quelconque de u et F', F'', F''' ses dérivées successives :

$$\left\{\begin{array}{l} f(u) - ig(u) = F''(u), \; f(u) + ig(u) = -2F(u) + 2uF'(u) - u^2F''(u), \\ \qquad\qquad h(u) = F'(u) - uF''(u). \end{array}\right.$$

De même la courbe :

$$x = \varphi(v), \qquad y = \psi(v), \qquad z = \chi(v)$$

étant une courbe minima, on aura, G étant une fonction quelconque de v et G', G'', G''' ses dérivées successives :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(v) - i\psi(v) = G''(v), \quad \varphi(v) + i\psi(v) = -2G(v) + 2vG'(v) - v^2G''(v), \\ \qquad\qquad \chi(v) = G'(v) - vG''(v) ; \end{array}\right.$$

d'où les coordonnées d'un point de la surface minima la plus générale :

$$\left\{\begin{array}{l} x + iy = -2F(u) + 2u.F'(u) - u^2F''(u) - 2G(v) + 2vG'(v) + v^2G''(v), \\ \qquad\qquad x - iy = F''(u) + G''(v), \\ \qquad z = F'(u) - uF''(u) + G'(v) - vG''(v). \end{array}\right.$$

Remarque. — Dans le cas où l'équation de la surface est mise sous la forme

$$z = f(x, y),$$

l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima, qui se trouve ainsi intégrée est, d'après les formules de la page 39 :

$$(1 + p^2).t + (1 + q^2).r - 2pqs = 0.$$

Lignes de courbure

7. — Les *lignes de courbure* sont les lignes tangentes en chacun de leurs points aux directions principales ou axes de l'indicatrice. Ce sont donc les intégrales de l'équation :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial.du}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial.dv} - \frac{\partial\Phi}{\partial.dv}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial.du} = 0,$$

les directions principales étant conjuguées et orthogonales, c'est-à-dire conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes et aux directions asymptotiques. Si ces deux couples constituent quatre directions distinctes, les directions principales seront aussi distinctes et distinctes des précédentes. Il en résulte qu'il n'y aura pas d'autres cas singuliers pour les lignes de courbure que ceux que l'on a déjà rencontrés pour les lignes minima et les lignes asymptotiques.

1° *Surfaces réglées non développables à génératrices isotropes (la sphère exceptée).* Une famille de lignes minima est constituée par des lignes asymptotiques. Prenant les lignes minima comme coordonnées, nous avons :

$$\Phi = 2F.du.dv.$$

Si nous supposons les lignes $u = C^{te}$ confondues avec des asymptotiques, $du = 0$ doit annuler Ψ ; donc :

$$\Psi = E'du^2 + 2F'.du.dv.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est alors :

$$F.dv.F'du - F.du(E'.du + F'.dv) = 0,$$

ou :

$$E'.F.du^2 = 0.$$

Les lignes de courbure sont doubles, ce sont les génératrices rectilignes isotropes qui sont déjà lignes minima et asymptotiques.

2° *Sphère.* Φ, Ψ sont proportionnels, l'équation différentielle est identiquement vérifiée. *Sur la sphère toutes les lignes sont lignes de courbure.*

3° *Surfaces développables non isotropes.* Prenons les génératrices

rectilignes comme courbes $u = C^{te}$, ce sont des lignes asymptotiques doubles, nous avons :

$$\Phi = E.du^2 + 2F.du.dv + G.dv^2,$$

$$\Psi = E'.du^2 ;$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$(F.du + G.dv)E'.du = 0.$$

Les lignes de courbure sont les génératrices rectilignes, qui sont déjà lignes asymptotiques, et leurs trajectoires orthogonales.

4° *Surfaces développables isotropes.* Prenant pour courbes $v = C^{te}$ les lignes minima doubles confondues avec les lignes asymptotiques doubles, nous avons :

$$\Phi = E.du^2, \qquad \Psi = E'.du^2.$$

L'équation aux lignes de courbure est identiquement vérifiée. *Sur les développables isotropes toutes les lignes sont lignes de courbure.*

5° *Plan.* — Pour un plan, les courbes minima sont des droites ; et toute ligne du plan est asymptotique et ligne de courbure.

Remarque. — Pour que les courbes coordonnées soient lignes de courbure, il faut d'abord qu'elles soient orthogonales, donc $F = 0$. L'équation différentielle des lignes de courbure se réduit alors à

$$EF'du^2 + (EG' - GE')\, dudv - GF'dv^2 = 0.$$

Donc, en écartant les cas singuliers, le fait que les lignes de courbure sont les courbes coordonnées est caractérisé par les identités $F = 0$, $F' = 0$.

On a vérifié au Ch. II, § 3, que l'identité seule $F' = 0$ exprime que les tangentes aux courbes coordonnées ont, en chaque point de la surface, des directions conjuguées, ce qu'on exprime en disant que ces courbes forment un *réseau conjugué.*

On peut caractériser les lignes de courbure, d'après cela, en disant qu'elles forment un *réseau conjugué orthogonal.*

Courbure géodésique

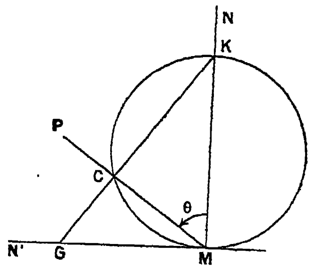
8. — Examinons maintenant la deuxième formule fondamentale :

$$\frac{\sin\theta}{R}=\frac{1}{H ds^3}\left[H^2(du\,d^2v-dv\,d^2u)-\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2+\frac{\partial E}{\partial v}du\,dv+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 & E du+F dv\\ \left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2+\frac{\partial G}{\partial u}du\,dv+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2 & F du+G dv\end{vmatrix}\right]$$

θ est l'angle (MN,MP) de la normale principale avec la normale à la surface (§ 1). Soit C le centre de courbure. Considérons la droite polaire, qui rencontre le plan tangent en G sur MN′ :

$$MC = MG\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = MG\sin\theta.$$



MG est ce qu'on appelle le *rayon de courbure géodésique* R_g. On a donc :

$$R = R_g \sin\theta.$$

Le point G est le *centre de courbure géodésique. La projection du centre de courbure géodésique sur la normale principale est le centre de courbure.* L'inverse du rayon de courbure géodésique s'appelle *courbure géodésique.* Son expression ne dépend que de E,F,G et de leurs dérivées ; *la courbure géodésique se conserve quand on déforme la surface.*

Cherchons s'il existe des courbes de la surface dont le rayon de courbure géodésique soit constamment infini. De telles courbes sont appelées *lignes géodésiques.* Alors $\frac{\sin\theta}{R}$ est constamment nul, et si ces courbes ne sont pas des droites, comme R n'est pas constamment infini, $\sin\theta = 0$. *Le plan osculateur est normal à la surface en chaque point de la courbe et réciproquement.* Toute droite tracée sur la surface est, du reste, évidemment une ligne géodésique, et peut être considérée comme satisfaisant à la condition précédente.

Les lignes géodésiques sont définies par une équation différentielle de la forme :

$$v'' = \Phi(u, v, v').$$

De l'étude des équations de cette forme il résulte qu'*il y a en général une ligne géodésique et une seule passant par chaque point de la surface et tangente en ce point à une direction donnée du plan tangent. Il y en a en général une et une seule joignant deux points donnés dans un domaine suffisamment petit.*

Prenons pour lignes coordonnées les lignes minima. Alors :

$$E = G = 0 \qquad \text{et} \qquad H^2 = -F^2.$$

L'équation différentielle des lignes géodésiques devient :

$$-F^2(du.d^2v - dv.d^2u) - \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} dv^2 & F dv \\ \frac{\partial F}{\partial u} du^2 & F du \end{vmatrix} = 0,$$

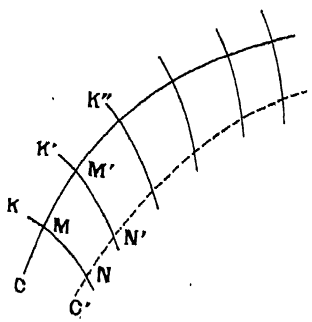
ou :

$$du.d^2v - dv.d^2u + \frac{\partial . \log F}{\partial v} du.dv^2 - \frac{\partial . \log F}{\partial u} du^2.dv = 0.$$

On voit qu'elle est vérifiée pour $du = 0$, $dv = 0$. Ainsi *les lignes minima sont des lignes géodésiques.*

Remarque. — Si le plan osculateur se confond avec le plan tangent, le centre de courbure se confond avec le centre de courbure géodésique ; et si, en particulier, on considère un plan, *dans ce plan la courbure géodésique n'est autre que la courbure.* Il en résulte que *les lignes géodésiques du plan sont les droites de ce plan*, ce qu'on vérifie facilement par le calcul.

Définition directe de la courbure géodésique. Considérons sur la surface une courbe (C) et une famille de courbes (K) orthogonales à (C). Sur chaque courbe (K) portons à partir du point M où elle rencontre la courbe (C) une longueur d'arc constante MN. Pour chaque valeur de cette constante nous obtenons une courbe (C′) lieu du point N. Prenons comme courbes coordonnées ($v = C^{te}$), les courbes (C), (C′),..., la courbe (C) étant $v = 0$; et prenons les courbes (K) comme courbes coordonnées ($u = C^{te}$) ; nous pourrons



prendre pour coordonnée v la longueur d'arc MN. Considérons alors le carré de l'élément d'arc :

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}.du.dv + \mathrm{G}.dv^2.$$

La courbe $v = 0$ est orthogonale à toutes les courbes (K), donc, quel que soit u :

$$\mathrm{F}(u, 0) = 0 ;$$

v représentant l'arc MN, on a, pour $du = 0$, $ds^2 = dv^2$, d'où $\mathrm{G} = 1$, et alors :

$$ds^2 = \mathrm{E}.du^2 + 2\mathrm{F}.du.dv + dv^2.$$

Nous supposerons que u représente l'arc de la courbe (C). Alors pour $v = 0$, $ds = du$, donc :

$$\mathrm{E}(u, 0) = 1,$$

et sur cette courbe (C) :

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{E}.\mathrm{G} - \mathrm{F}^2 = 1,$$

d'où, par exemple, $\mathrm{H} = 1$. On a donc pour cette courbe (C) :

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{ds^3}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}du^2 & \mathrm{E}du \\ \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du^2 & \mathrm{F}du \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

Pour la courbe (C′) nous aurons, en désignant l'arc de cette courbe par s' :

$$ds'^2 = \mathrm{E}.du^2,$$

d'où :

$$ds' = \sqrt{\mathrm{E}}\, du ; \qquad \frac{ds'}{du} = \sqrt{\mathrm{E}},$$

et si nous prenons la dérivée logarithmique par rapport à v :

$$\frac{\partial \log \frac{ds'}{du}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = \frac{1}{2\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

Si on fait tendre v vers zéro, (C′) tend vers (C), E tend vers 1, et à la limite :

$$\frac{\partial \log \frac{ds'}{du}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

On conclut donc, en mettant la lettre s, au lieu de u, pour désigner l'arc de (C).

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin \theta}{R} = -\left(\frac{\partial \log \frac{ds'}{ds}}{\partial v}\right)_{v=0},$$

ce qui donne une définition de la courbure géodésique n'empruntant aucun élément extérieur à la surface : s et s' désignent les longueurs d'arcs homologues sur (C) et (C'), et v est la longueur d'arc constante MN comprise entre (C) et (C') sur les courbes (K). Cette définition rend intuitive l'invariance de la courbure géodésique dans la *déformation* des surfaces.

Remarque. — Les considérations qui terminent le chapitre précédent conduiraient à introduire, en même temps que la courbure géodésique, l'élément géométrique

$$\frac{\sin \theta}{R} - \frac{d\varphi_0}{ds} = \frac{r_1 du + r dv}{\sqrt{\Phi\,(du, dv)}},$$

qui, comme la courbure normale, ne dépend que du rapport $\frac{du}{dv}$, c'est-à-dire de la direction de la tangente. Mais il n'a de sens précis que si on a particularisé le choix des directions origines tangentes MO : c'est la torsion géodésique d'une courbe tangente à la proposée et faisant un angle constant avec les directions origines qui correspondent à ses divers points.

Propriétés des lignes géodésiques

9. — Supposons en particulier que toutes les courbes (K) soient des géodésiques. Avec les mêmes conventions que précédemment, $du = 0$ doit être une solution de l'équation différentielle des lignes géodésiques, ce qui donne l'identité :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} & F \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0\,;$$

donc F est une fonction de u seulement, et comme $F = 0$ pour $v = 0$, F est identiquement nul, et :

$$ds^2 = Edu^2 + dv^2 ;$$

et alors toutes les courbes (C) coupent orthogonalement les géodésiques (K). Donc *si nous considérons une courbe* (C), *si nous menons en chaque point de* (C) *la géodésique qui lui est orthogonale, et si nous portons sur chacune de ces géodésiques un arc constant, le lieu des extrémités de ces arcs est une courbe* (C') *normale aux géodésiques*. Nous obtenons ainsi les *courbes parallèles* sur une surface quelconque.

Réciproquement, si nous considérons une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, ces trajectoires déterminent sur les géodésiques des longueurs d'arc égales. Toujours avec les mêmes hypothèses, les courbes $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$ étant orthogonales, $F = 0$. Les $u = C^{te}$ étant des géodésiques, il faut que :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv^2 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2 & G \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = 0.$$

$G \neq 0$, sans quoi les courbes $u = C^{te}$ seraient des courbes minima, donc $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ et $G = \varphi(v)$. Calculons alors l'arc d'une courbe (K) compris entre la courbe $v = v_0$ et la courbe $v = v_1$:

$$ds^2 = Gdv^2 = \varphi(v)dv^2,$$

et :

$$s = \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{\varphi(v)}.dv ;$$

s est indépendant de u, l'arc est bien le même sur toutes les géodésiques.

Si on prend encore pour v l'arc sur les courbes $u = c^{te}$:

$$ds^2 = Edu^2 + dv^2,$$

et *cette forme est caractéristique du système de coordonnées employé, constitué par une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales.*

Prenons alors sur la surface deux points A,B. Il existe une ligne géodésique et une seule dans le domaine de ces deux points et joi-

gnant ces deux points. Considérons la comme appartenant à une famille de géodésiques voisines qui ne se coupent pas dans le domaine, et prenons ces géodésiques et leurs trajectoires orthogonales comme courbes coordonnées. Soit alors une ligne quelconque de la surface allant de A à B, et définie par l'équation :

$$u = f(v).$$

Si A a pour coordonnées u_0, v_0 ; et si u_0, v_1 sont celles de B, la longueur de l'arc AB de cette ligne est :

$$\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{\mathrm{E}du^2 + dv^2} = \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{\mathrm{E}(f(v), v)f'^2(v) + 1} \, . \, dv.$$

Cette intégrale est visiblement minima si $f'(v) = 0$, c'est-à-dire si la courbe joignant AB est la géodésique. Donc, *dans un domaine suffisamment petit entourant deux points d'une surface, la géodésique est le plus court chemin entre ces deux points.*

Torsion géodésique

10. — Etudions enfin la troisième formule fondamentale :

$$\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\mathrm{H}^2 ds^2} \begin{vmatrix} \mathrm{E}'du + \mathrm{F}'dv & \mathrm{F}'du + \mathrm{G}'dv \\ \mathrm{E}du + \mathrm{F}dv & \mathrm{F}du + \mathrm{G}dv \end{vmatrix}.$$

Si θ est constant, et en particulier constamment nul, la formule précédente donne la torsion ; elle donne donc en particulier la torsion d'une géodésique. L'expression précédente ne dépend que de $\frac{du}{dv}$, c'est-à-dire de la direction de la tangente. Considérons alors sur la surface une courbe (C) et un point M. Il existe une géodésique tangente à (C) au point M et $\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}$ est la torsion de cette géodésique. C'est pourquoi $\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}$ s'appelle *torsion géodésique*. On voit ainsi que *la torsion géodésique en un point d'une courbe est la torsion de la géodésique tangente en ce point à la courbe donnée.* Posons :

$$\frac{1}{\mathrm{T}_g} = \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}$$

T_g est le *rayon de torsion géodésique*. Contrairement au rayon de courbure géodésique, il change dans la déformation des surfaces.

La formule précédente montre que la torsion géodésique est nulle si la direction du, dv est une direction principale; *la torsion géodésique est nulle pour toute courbe tangente à une ligne de courbure.* Il en résulte que *les lignes de courbure ont une torsion géodésique constamment nulle* (*Théorème de Lancret*).

$\frac{1}{T_g}$ est le quotient de deux trinômes du deuxième degré en du, dv, on peut donc étudier sa variation. Prenons pour courbes coordonnées les lignes de courbure, de sorte que (§ 7) $F = F' = 0$, et :

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{H^2 ds^2}(E'G - G'E)du\,dv = \left(\frac{E'}{E} - \frac{G'}{G}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}.$$

Si nous revenons aux notations employées au § 2 pour l'étude de la courbure normale, les paramètres directeurs de la tangente dans le plan tangent sont :

$$P = \sqrt{E}\frac{du}{ds}, \qquad Q = \sqrt{G}\frac{dv}{ds};$$

et alors :

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{E'}{E} - \frac{G'}{G}\right)PQ;$$

les rayons de courbure principaux sont :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{E'}{E}, \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{G'}{G};$$

d'où :

$$\frac{1}{T_g} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)PQ$$

d'où la *formule d'Ossian Bonnet*, analogue à la formule d'Euler :

$$\frac{1}{T_g} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin\varphi.\cos\varphi.$$

Théorèmes de Joachimsthal

11. — Considérons une courbe (C) intersection de deux surfaces ; le plan normal à (C) en l'un de ses points M contient la normale princi-

pale MP à la courbe et les normales MN, MN_1 aux deux surfaces. Soit V l'angle des normales MN, MN_1 ; θ, θ' leurs angles avec MP.

$$V = \theta' - \theta\,;$$

mais :

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T_g} \qquad \frac{1}{T} - \frac{d\theta'}{ds} = \frac{1}{T'_g}$$

d'où en retranchant :

$$\frac{dV}{ds} = \frac{1}{T_g} - \frac{1}{T'_g}\,.$$

Supposons alors que (C) soit ligne de courbure des deux surfaces ; $\frac{1}{T_g}$ et $\frac{1}{T'_g}$ sont tous deux nuls, $\frac{dV}{ds} = 0$, V est constant. D'où les *Théorèmes de Joachimsthal : Si deux surfaces se coupent suivant une ligne de courbure, leur angle est constant tout le long de cette ligne*, et la même formule montre immédiatement que réciproquement : *si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et si l'intersection est ligne de courbure pour l'une des surfaces, elle est aussi ligne de courbure pour l'autre.* Sur un plan ou sur une sphère, toutes les lignes sont lignes de courbure ; donc *si une ligne de courbure d'une surface est plane ou sphérique, le plan ou la sphère qui la contient coupe la surface sous un angle constant, et réciproquement, si un plan ou une sphère coupe une surface sous un angle constant l'intersection est une ligne de courbure de la surface.* Enfin si un cercle est ligne de courbure d'une surface, il y a une sphère passant par ce cercle qui est tangente à la surface en un point du cercle, et, par suite, en tous les points du cercle. Donc *toute ligne de courbure circulaire est la courbe de contact d'une sphère inscrite ou circonscrite à la surface.* De même *toute ligne de courbure rectiligne est courbe de contact d'un plan tangent à la surface en tous les points de cette droite.*

CHAPITRE IV

LES SIX INVARIANTS. — LA COURBURE TOTALE

Les six invariants

1\. — Dans l'étude des courbes tracées sur une surface (S) ne sont intervenus que les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales :

$$\Phi(du, dv) = ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du.dv + \mathrm{G}dv^2,$$

$$\Psi(du, dv) = \Sigma\mathrm{A}.d^2x = \mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'du.dv + \mathrm{G}'dv^2,$$

et les différentielles de u, v, considérées comme les fonctions d'une variable indépendante t qui correspondent à chaque courbe particulière considérée.

Si l'on déplace la surface (S) dans l'espace, sans la déformer, et sans changer les coordonnées superficielles u, v employées, ces formes quadratiques demeureront les mêmes, de sorte que *leurs six coefficients* E, F, G, E', F', G' *sont six invariants différentiels, pour le groupe des mouvements dans l'espace.*

Cela résulte, pour la forme $ds^2 = \Phi\,(du, dv)$, de ce qu'elle représente le carré de la différentielle d'un arc qui reste le même dans les conditions énoncées.

Dès lors $\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$ est un invariant, et la formule :

$$\Psi(du, dv) = \mathrm{H}\Phi(du, dv).\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}},$$

dont tous les facteurs du second membre sont invariants, montre que Ψ est encore un invariant.

Il n'y a du reste aucune difficulté à vérifier, par un calcul direct, l'invariance des six coefficients sur les formules qui les définissent :

$$(1) \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G},$$

$$(2) \qquad \Sigma\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{E}', \qquad \Sigma\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \mathrm{F}', \qquad \Sigma\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathrm{G}',$$

où A, B, C sont les trois déterminants fonctionnels :

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \qquad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Rappelons enfin que :

$$H = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \pm \sqrt{EG - F^2}.$$

La forme de la surface définie par les six invariants

2. — Supposons maintenant que E, F, G, E′, F′, G′ aient été calculés, en fonction de u, v, pour une surface (S) particulière :

$$(3) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v);$$

et considérons les équations (1), (2) comme un système d'équations aux dérivées partielles, où x, y, z sont les fonctions inconnues, u, v les variables indépendantes, et E, F, G, E′, F′, G′ des fonctions données. En vertu de l'invariance que nous venons d'établir, ce système différentiel admettra comme intégrales, non seulement les fonctions (3), qui définissent (S), mais encore toutes les fonctions :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha f + \alpha' g + \alpha'' h, \\ y &= y_0 + \beta f + \beta' g + \beta'' h, \\ z &= z_0 + \gamma f + \gamma' g + \gamma'' h, \end{aligned} \right.$$

qui définissent les surfaces obtenues en déplaçant (S) de toutes les manières possibles, lorsqu'on donne à x_0, y_0, z_0, toutes les valeurs constantes possibles, et à α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' toutes les valeurs constantes compatibles avec les six conditions d'orthogonalité bien connues.

Nous obtenons ainsi des intégrales dépendant de six constantes arbitraires. Nous montrerons que le système (1), (2) n'en a pas d'autres ; ce que nous exprimerons en disant que *la forme de la surface est entièrement définie par les six invariants* E, F, G, E′, F′, G′.

On démontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles que, *dans tout système dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes arbitraires, toutes les dérivées partielles d'un certain ordre peuvent s'exprimer en fonction des variables indépendantes et dépendantes et des dérivées d'ordre inférieur*. Nous allons vérifier d'abord qu'il en est bien ainsi pour le système (1), (2).

Différentions les équations (1). Nous obtenons les formules déjà utilisées :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial v},\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u};\\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v};\end{array}\right.$$

et l'on prévoit qu'en associant ces équations aux équations (2), on obtiendra effectivement les expressions de toutes les dérivées du second ordre en fonction de $u, v, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

Pour faciliter ce calcul, nous introduirons les cosinus directeurs de la normale :

$$(6)\qquad \lambda=\frac{A}{H},\qquad \mu=\frac{B}{H},\qquad \nu=\frac{C}{H};$$

et nous substituerons à la forme $\Sigma A d^2x$ la forme :

$$(7)\qquad \Sigma\lambda.d^2x=\frac{1}{H}\Sigma A.d^2x=L.du^2+2M.du.dv+N.dv^2$$

où :

$$(8)\qquad L=\frac{E'}{H},\qquad M=\frac{F'}{H},\qquad N=\frac{G'}{H};$$

les équations (2) sont alors remplacées par les équations :

$$(9)\qquad \Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=L,\qquad \Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=M,\qquad \Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=N.$$

Posons ensuite :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=L'\frac{\partial x}{\partial u}+L''\frac{\partial x}{\partial v}+L'''\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=L'\frac{\partial y}{\partial u}+L''\frac{\partial y}{\partial v}+L'''\mu,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=L'\frac{\partial z}{\partial u}+L''\frac{\partial z}{\partial v}+L'''\nu,$$

L', L'', L''' étant des coefficients à déterminer; nous en déduisons :

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=EL'+FL'',\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=FL'+GL'',\quad \Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=L''';$$

La troisième de ces conditions montre que $L'''=L$; et les deux premières, en tenant compte des formules (5), sont deux équations linéaires qui fournissent L' et L''.

En opérant de même pour les autres dérivées, on obtient les résultats suivants :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= L' \frac{\partial x}{\partial u} + L'' \frac{\partial x}{\partial v} + L.\lambda, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= M' \frac{\partial x}{\partial u} + M'' \frac{\partial x}{\partial v} + M.\lambda, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= N' \frac{\partial x}{\partial u} + N'' \frac{\partial x}{\partial v} + N.\lambda, \end{aligned}\right.$$

avec les équations auxiliaires :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} EL' + FL'' &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, & FL' + GL'' &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \\ EM' + FM'' &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & FM' + GM'' &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \\ EN' + FN'' &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, & FN' + GN'' &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduira les valeurs des coefficients L', L'', M', M'', N', N''. On remarquera qu'elles ne dépendent que des coefficients E, F, G de l'élément linéaire $ds^2 = \Phi\,(du, dv)$, et des dérivées premières de ces coefficients.

Enfin, les mêmes équations (10) subsisteront pour les autres coordonnées y, z ; il n'y aura qu'à y laisser les mêmes coefficients, et à y remplacer la lettre x par la lettre y ou la lettre z, en même temps qu'on changera λ en μ ou en ν.

Nous concluons de là que si on connaît, pour un système de valeurs de u, v, les valeurs de x, y, z et de leurs dérivées premières, on pourra calculer les valeurs de leurs dérivées secondes, et, par des différentiations nouvelles, celles de toutes leurs dérivées d'ordre supérieur ; et par suite les développements en séries de Taylor d'une solution quelconque ne peuvent contenir d'autres arbitraires que les valeurs initiales de :

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v};$$

qui sont d'ailleurs liées par les équations (1) ; et, lorsque ces valeurs initiales sont données, l'intégrale est entièrement déterminée.

Donc, pour prouver que les équations (4) donnent l'intégrale générale, il suffit de montrer que les fonctions x, y, z définies par ces équations (4) peuvent satisfaire aux conditions initiales énoncées. Or, si nous introduisons les cosinus directeurs λ', μ', ν' ; λ'', μ'', ν'' des tangentes MU, MV aux deux courbes coordonnées qui passent par un point quelconque M de la surface, nous savons que :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \lambda' \sqrt{E}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \mu' \sqrt{E}, & \frac{\partial z}{\partial u} &= \nu' \sqrt{E}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \lambda'' \sqrt{G}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \mu'' \sqrt{G}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \nu'' \sqrt{G}\,; \end{aligned}\right.$$

et les conditions (1) se réduisent à :

$$\Sigma\lambda'^2 = 1, \qquad \Sigma\lambda''^2 = 1, \qquad \Sigma\lambda'\lambda'' = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \cos\omega,$$

ω étant l'angle $\widehat{UMV}$.

Les conditions initiales signifient donc que l'on se donne arbitrairement la position du point M qui correspond aux valeurs initiales de u, v, et la direction des tangentes MU, MV, sous la seule réserve que ces directions fassent entre elles le même angle qu'elles font au point correspondant de (S). Il y a donc bien une des positions de (S) qui satisfait à ces conditions, et notre résultat se trouve définitivement établi.

Remarque. — Le raisonnement précédent serait en défaut, si les courbes coordonnées étaient les lignes minima (car alors $E = G = 0$). Mais il suffit de remarquer que si Φ et Ψ sont connues pour un système de coordonnées u, v, on en déduit leurs expressions pour un autre système de coordonnées u, v, en y effectuant directement le changement de variables correspondant. Notre théorème est donc vrai pour tout système de coordonnées superficielles, dès qu'il est vrai pour un seul.

Les conditions d'intégrabilité

3. — Les coefficients des formules (10) satisfont à certaines conditions, dites *conditions d'intégrabilité*, qu'on obtient, d'après la théorie des équations aux dérivées partielles, en écrivant que chacune des dérivées du troisième ordre $\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$ a la même valeur, qu'on l'obtienne en différentiant l'une ou l'autre des formules (10).

Pour obtenir ces conditions, il est commode d'avoir des formules qui donnent les dérivées des cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale. Ces cosinus sont définis par les équations :

$$\Sigma\lambda\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\lambda\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma\lambda^2 = 1,$$

qui donnent, par différentiation :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -\Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -L, && \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -M,\\ &\Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -M, && \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -\Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -N,\\ &\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0, && \Sigma\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0; \end{aligned}\right.$$

Si donc on pose, en suivant la même méthode qu'au paragraphe précédent,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= P'\frac{\partial x}{\partial u} + P''\frac{\partial x}{\partial v} + P\lambda, \\ \frac{\partial\mu}{\partial u} &= P'\frac{\partial y}{\partial u} + P''\frac{\partial y}{\partial v} + P\mu, \\ \frac{\partial\nu}{\partial u} &= P'\frac{\partial z}{\partial u} + P''\frac{\partial z}{\partial v} + P\nu, \end{aligned}\right. \qquad \left|\ \begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= Q'\frac{\partial x}{\partial u} + Q''\frac{\partial x}{\partial v} + Q\lambda, \\ \frac{\partial\mu}{\partial v} &= Q'\frac{\partial y}{\partial u} + Q''\frac{\partial y}{\partial v} + Q\mu, \\ \frac{\partial\nu}{\partial v} &= Q'\frac{\partial z}{\partial u} + Q''\frac{\partial z}{\partial v} + Q\nu, \end{aligned}\right.$$

on trouve :

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u} = EP' + FP'', \quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial u} = FP' + GP'', \quad \Sigma\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u} = P = 0;$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = EQ' + FQ'', \quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = FQ' + GQ'', \quad \Sigma\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v} = Q = 0;$$

d'où :

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= P'\frac{\partial x}{\partial u} + P''\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= Q'\frac{\partial x}{\partial u} + Q''\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right.$$

les coefficients P', P'', Q', Q'' étant définis par les équations :

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} EP' + FP'' &= -L, \quad & FP' + GP'' &= -M, \\ EQ' + FQ'' &= -M, \quad & FQ' + GQ'' &= -N. \end{aligned}\right.$$

Il suffira, pour μ, ν, de changer x en y, et en z, respectivement.

Nous achèverons le calcul, en supposant la surface rapportée à ses lignes minima. Les calculs précédents se simplifient alors beaucoup. Si nous appliquons directement les formules trouvées, en tenant compte du fait que E et G sont nuls, nous obtenons, pour les formules (11) :

$$L'' = 0,\ L' = \frac{\partial \log F}{\partial u},\ M'' = 0,\ M' = 0,\ N'' = \frac{\partial \log F}{\partial v},\ N' = 0\,;$$

et pour les formules (14) :

$$P'' = -\frac{L}{F},\ P' = -\frac{M}{F},\ Q'' = -\frac{M}{F},\ Q' = -\frac{N}{F}\,;$$

c'est-à-dire :

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{\partial \log F}{\partial u}.\ \frac{\partial x}{\partial u} + L.\lambda, \qquad & \ldots, \quad \ldots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= M.\lambda, & \ldots, \quad \ldots, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \frac{\partial \log F}{\partial v}.\ \frac{\partial x}{\partial v} + N.\lambda, & \ldots, \quad \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= -\frac{1}{F}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + L\frac{\partial x}{\partial v}\right), && \ldots \quad \ldots, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= -\frac{1}{F}\left(N\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v}\right), && \ldots \quad \ldots \end{aligned} \right.$$

Différentions par rapport à v la première équation (15), en tenant compte des équations (15) et (16) :

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = \left(\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} - \frac{NL}{F}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{LM}{F}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(M\frac{\partial \log F}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial v}\right)\lambda,$$

Différentions de même par rapport à u la deuxième équation (15) :

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = -\frac{M^2}{F}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{LM}{F}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u}\lambda\ ;$$

et en égalant, nous obtenons :

$$(17) \quad \left(\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} - \frac{LN - M^2}{F}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(M\frac{\partial \log F}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}\right)\lambda = 0.$$

C'est là une condition de la forme :

$$S'\frac{\partial x}{\partial u} + S''\frac{\partial x}{\partial v} + S\lambda = 0,$$

et en reprenant le même calcul, pour y et z, on obtiendrait les conditions analogues :

$$S'\frac{\partial y}{\partial u} + S''\frac{\partial y}{\partial v} + S\mu = 0,$$

$$S'\frac{\partial z}{\partial u} + S''\frac{\partial z}{\partial v} + S\nu = 0.$$

On en conclut qu'on a nécessairement $S = S' = S'' = 0$, c'est-à-dire ici :

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} - \frac{LN - M^2}{F} = 0, \quad M\frac{\partial \log F}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = 0\ ;$$

et ces conditions entraînent la condition (17).

En égalant de même les deux valeurs de $\dfrac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$, on obtiendra les conditions qui se déduisent de (18) en échangeant les rôles des variables u, v ; cela ne modifie que la seconde de ces conditions.

Les conditions d'intégrabilité cherchées sont donc :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &M\frac{\partial \log F}{\partial u}=\frac{\partial M}{\partial u}-\frac{\partial L}{\partial v}\\ &\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\partial v}=\frac{LN-M^2}{F}\\ &M\frac{\partial \log F}{\partial v}=\frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}\end{aligned}\right.$$

et ce sont là, d'après la théorie des équations différentielles, les seules conditions d'intégrabilité du système considéré.

Courbure totale

La deuxième des formules précédentes, due à Gauss :

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\partial v}=\frac{LN-M^2}{F}$$

conduit à une conséquence importante. Reprenons en effet l'équation aux rayons de courbure principaux, qui est ici

$$H^2(LN-M^2)+2SFHM-S^2F^2=0,$$

où :

$$S=\frac{H}{R}.$$

Elle s'écrit :

$$LN-M^2+2FM.\frac{1}{R}-\frac{F^2}{R^2}=0,$$

d'où :

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{LN-M^2}{F^2},$$

c'est-à-dire, d'après la formule (20),

$$(21)\qquad \frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\partial v}:$$

le produit des rayons de courbure principaux ne dépend que de l'élément linéaire ; il se conserve donc dans la déformation des surfaces. On donne à $\frac{1}{R_1R_2}$ le nom de *Courbure totale.*

Remarque. — Les *surfaces à courbure totale nulle* sont caractérisées, d'après ce qui précède, soit par la condition $LN-M^2=0$, ou $E'G'-F'^2=0$, qui exprime que la surface considérée est l'enveloppe de ∞^1 plans — (page 46) — ; soit par la condition $\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\partial v}=0$, qui exprime, l'élément linéaire étant $ds^2=2Fdudv$, que la surface est applicable sur un plan (page 24). On en conclut donc que *les surfaces*

applicables sur un plan sont les surfaces développables (Cf. Ch. V, § 4).

Représentation sphérique. — De même que l'on a fait correspondre à une courbe son indicatrice sphérique, on peut imaginer une correspondance entre une surface quelconque et la sphère de rayon 1, l'homologue d'un point (u, v) de la surface étant le point (λ, μ, ν). A une aire de la surface correspond une aire sphérique. La considération de la limite du rapport de ces aires lorsqu'elles deviennent infiniment petites dans toutes leurs dimensions va nous conduire à une *définition directe de la courbure totale.*

L'aire sur la surface a pour expression :

$$\mathcal{A} = \iint\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du dv = \iint H\, du dv,$$

Pour avoir l'aire homologue sur la sphère, il faut d'abord calculer l'élément linéaire $d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$. D'après les formules (16) :

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial u}du + \frac{\partial\lambda}{\partial v}dv = -\frac{du}{F}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + L\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{dv}{F}\left(N\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v}\right) =$$
$$= -\frac{1}{F}\left[L\frac{\partial x}{\partial v}du + M dx + N\frac{\partial x}{\partial u}dv\right];$$

d'où :

$$\Sigma d\lambda^2 = \frac{1}{F^2}\left[M^2.2F du dv + 2LMF.du^2 + 2MNF.dv^2 + 2LNF.du dv\right],$$
$$\Sigma d\lambda^2 = \frac{2LM}{F}du^2 + 2\frac{LN + M^2}{F}du dv + \frac{2MN}{F}dv^2.$$

Pour la sphère, la fonction analogue à H est donc :

$$\sqrt{4\frac{LM^2N}{F^2} - \frac{(LN + M^2)^2}{F^2}} = \frac{LN - M^2}{iF} = \frac{LN - M^2}{H},$$

et l'aire sphérique a pour expression :

$$\mathcal{A}' = \iint\frac{LN - M^2}{H}du dv;$$

ce qui peut s'écrire, en remarquant que :

$$d\mathcal{A} = H.\, du dv,$$

$$\mathcal{A}' = \iint\frac{LN - M^2}{H^2}.\, d\mathcal{A} = \iint\frac{1}{R_1R_2}d\mathcal{A}$$

donc :

$$d\mathcal{A}' = \frac{1}{R_1R_2}d\mathcal{A}:$$

le rapport des aires homologues sur la sphère et sur la surface a donc pour limite la courbure totale, lorsque ces aires deviennent infiniment petites dans toutes leurs dimensions.

Coordonnées orthogonales et isothermes

4. — Pour éviter l'emploi des imaginaires dans les considérations qui précèdent, nous introduirons un nouveau système de coordonnées curvilignes. La surface étant supposée réelle, nous choisirons d'abord les coordonnées minima de façon que u, v soient imaginaires conjugués. Nous poserons donc :

$$u = u' + iv', \qquad v = u' - iv',$$

u', v' étant des quantités réelles. Nous en tirons :

$$du = du' + idv', \qquad dv = du' - idv',$$

d'où :

$$dudv = du'^2 + dv'^2.$$

L'élément linéaire prend la forme :

$$ds^2 = 2\mathrm{F}.\,dudv = 2\mathrm{F}\,(du'^2 + dv'^2)\,;$$

les coordonnées u', v' sont orthogonales ; on leur donne le nom de *coordonnées orthogonales et isothermes*. On peut dire que *ces coordonnées divisent la surface en un réseau de carrés infiniment petits.* Considérons en effet les courbes coordonnées u', $u' + h$, $u' + 2h$... et v', $v' + h$, $v' + 2h$... ; si on prend l'un des quadrilatères curvilignes obtenus, ses angles sont droits ; ses côtés sont $\sqrt{2\mathrm{F}}\,du'$ et $\sqrt{2\mathrm{F}}.dv'$, c'est-à-dire $\sqrt{2\mathrm{F}}.h$, aux infiniments petits d'ordre supérieur près ; ces arcs sont égaux.

Avec ce système de coordonnées particulières, en désignant par $\overline{\mathrm{E}}$, $\overline{\mathrm{F}}$, $\overline{\mathrm{G}}$, $\overline{\mathrm{H}}$ les valeurs des fonctions analogues à E, F, G, H, nous avons

$$\overline{\mathrm{E}} = 2\mathrm{F},\ \overline{\mathrm{G}} = 2\mathrm{F},\ \overline{\mathrm{F}} = 0,\ \overline{\mathrm{H}}^2 = \overline{\mathrm{E}}\,\overline{\mathrm{G}} - \overline{\mathrm{F}}^2 = 4\mathrm{F}^2,\ \overline{\mathrm{H}} = 2\mathrm{F},$$

donc :

$$ds^2 = \overline{\mathrm{H}}\,(du'^2 + dv'^2).$$

Mais nous avons, pour une fonction Φ quelconque :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u'} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v'} = i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right);$$

d'où :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u'^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial v'^2} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2},$$

et :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v'^2} = 4\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}.$$

D'où, par conséquent :

$$4\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} = 4\frac{\partial^2 \log \overline{H}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \overline{H}}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2 \log \overline{H}}{\partial v'^2}.$$

En supprimant les accents et les traits supérieurs, nous obtenons les formules suivantes, en coordonnées orthogonales et isothermes :

$$ds^2 = H(du^2 + dv^2),$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2H}\left(\frac{\partial^2 \log H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial v^2}\right).$$

Nous poserons encore :

$$\Sigma\lambda d^2x = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

L'équation aux rayons de courbure principaux sera :

$$(LN - M^2) - \frac{H}{R}(L + N) + \frac{H^2}{R^2} = 0,$$

et on aura :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{H^2}.$$

Calculons la représentation sphérique. Posons, comme au § 2,

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \mu' = \frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \nu' = \frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\lambda'' = \frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \mu'' = \frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \nu'' = \frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

De la relation

$$\Sigma\lambda^2 = 1,$$

nous tirons :

$$\Sigma\lambda . \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0.$$

D'autre part

$$L = \Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma\frac{\partial \lambda}{\partial u} . \frac{\partial x}{\partial u} = -\sqrt{H}.\Sigma\lambda'\frac{\partial \lambda}{\partial u};$$

d'où :

$$\Sigma\lambda'\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{L}{\sqrt{H}};$$

de même :

$$M = \Sigma\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\Sigma\frac{\partial \lambda}{\partial u} . \frac{\partial x}{\partial v} = -\sqrt{H}\Sigma\lambda''\frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

$$\Sigma\lambda''\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{M}{\sqrt{H}}.$$

D'où trois équations en $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, $\frac{\partial\nu}{\partial u}$. Multiplions respectivement par $\lambda, \lambda', \lambda''$ et ajoutons, il vient :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\frac{L}{H}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{M}{H}\cdot\frac{\partial x}{\partial v};$$

et de même :

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = -\frac{L}{H}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{M}{H}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial u} = -\frac{L}{H}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{M}{H}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

On obtiendra par un calcul analogue :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = -\frac{1}{H}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = -\frac{1}{H}\left(M\frac{\partial y}{\partial u} + N\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial v} = -\frac{1}{H}\left(M\frac{\partial z}{\partial u} + N\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Alors, sur la sphère, les fonctions analogues à E, F, G, H seront :

$$\mathcal{E} = \Sigma\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{H^2}\Sigma\left(L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \frac{L^2 + M^2}{H};$$

$$\mathcal{F} = \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial u}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{1}{H^2}\Sigma\left(L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v}\right)\cdot\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{M(L+N)}{H};$$

$$\mathcal{G} = \Sigma\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{H^2}\Sigma\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \frac{M^2 + N^2}{H};$$

d'où :

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{E}.\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \frac{(L^2 + M^2)(M^2 + N^2) - M^2(L + N)^2}{H^2} = \left(\frac{LN - M^2}{H}\right)^2,$$

et l'aire sur la sphère a pour expression :

$$\mathcal{A}' = \iint \frac{LN - M^2}{H}\, du dv.$$

On retrouve la même expression que précédemment, et on arriverait de même à la définition directe de la courbure totale.

Remarque. — Dans l'expression précédente, $\mathcal{A}'$ a un signe, qui est celui de $LN - M^2$, car $dudv$ est considéré comme positif.

L'interprétation de ce signe résulte de l'identité :

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u} & \frac{\partial\mu}{\partial u} & \frac{\partial\nu}{\partial u} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} & \frac{\partial\mu}{\partial v} & \frac{\partial\nu}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{LN - M^2}{H^2} \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

qui indique si les deux trièdres formés par la direction commune de la normale à la surface et de la normale à la sphère, et par les directions positives des courbes $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ (considérées sur la surface et sur la sphère, respectivement) ont la même disposition.

On en conclut que, si $\mathcal{A}' > 0$, le point mobile x, y, z décrivant le contour qui limite l'aire sur la surface dans le sens direct, le point λ, μ, ν décrira le contour qui limite l'aire homologue sur la sphère aussi dans le sens direct. Si $\mathcal{A}' < 0$, les conclusions sont inverses.

Relations entre la courbure totale et la courbure géodésique

5. — La courbure totale est un élément qui reste invariant dans la déformation des surfaces. Cherchons s'il y a des relations entre elle et les autres éléments invariants dans la déformation. Considérons la courbure géodésique. En coordonnées orthogonales et isothermes, son expression est :

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{H ds^3}\left[H^2(du d^2v - dv d^2u) - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial u}du^2 + \frac{\partial H}{\partial v}du dv - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial u}dv^2 & H du \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial v}du^2 + \frac{\partial H}{\partial u}du dv + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial v}dv^2 & H dv \end{vmatrix} \right],$$

ou :

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{ds^3}\left[H(du d^2v - dv d^2u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial u}dv - \frac{\partial H}{\partial v}du\right)(du^2 + dv^2)\right];$$

mais :

$$ds^2 = H\,(du^2 + dv^2),$$

et la formule précédente s'écrit :

$$\frac{ds}{R_g} = \frac{du d^2v - dv d^2u}{du^2 + dv^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log H}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log H}{\partial v}\,du;$$

ou encore :

$$\frac{ds}{R_g} = d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{dv}{du}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log H}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log H}{\partial v}\,du.$$

Imaginons alors, dans le plan tangent, les demi-tangentes MU, MV aux courbes coordonnées dans le sens respectif des u, v croissants ;

considérons la tangente à une courbe quelconque MT de la surface, et soit (MU, MT) $= \varphi$:

$$\cos \varphi = \sqrt{\mathrm{H}}\, \frac{du}{ds},$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\mathrm{H}}\, \frac{dv}{ds};$$

d'où :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{du},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg.} \frac{dv}{du};$$

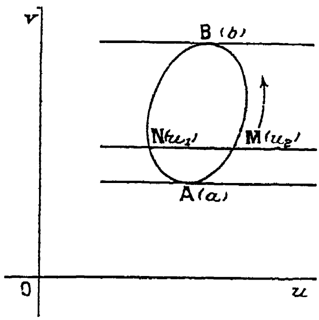
et la formule précédente devient :

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_g} = d\varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u} dv - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v} du.$$

Prenons alors sur la surface (S) un contour fermé et intégrons le long de ce contour dans le sens direct :

$$\int \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \int d\varphi + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u} dv - \frac{1}{2} \int \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v} du.$$

Rappelons le *théorème de Green*, qui va nous servir à transformer ce résultat. Dans le plan des u, v, le point (u, v) décrit un contour fermé, aussi dans le sens direct. Supposons-le compris entre deux tangentes parallèles à l'axe des u ; soient A, B les points de contact. Nous avons ainsi deux arcs AMB et ANB, et si nous désignons par C le contour, nous avons, pour une fonction $f(u, v)$ quelconque :



$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\partial f}{\partial u} dv = \int_{\mathrm{AMB}} \frac{\partial f}{\partial u} dv + \int_{\mathrm{BNA}} \frac{\partial f}{\partial u} dv.$$

Supposons qu'une parallèle à OU, comprise entre les deux tangentes considérées, coupe le contour en deux points M (u_2) et N (u_1).

Soient enfin a, b les valeurs de u qui correspondent aux deux points A, B. Nous avons :

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\partial f}{\partial u} dv = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=u_2} dv - \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=u_1} dv = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_1\right] dv.$$

Mais :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_1 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} . du,$$

et alors :

$$\int_{C} \frac{\partial f}{\partial u} . dv = \int_{a}^{b} dv \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} . du = \int\int \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du dv,$$

l'intégrale double étant étendue à toute l'aire limitée par le contour.

Cette formule subsiste pour un contour simple quelconque.

De même :

$$\int_{C} \frac{\partial f}{\partial v} du = - \int\int \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} du dv.$$

Alors :

$$\int \frac{ds}{R_g} = \int d\varphi + \frac{1}{2} \int\int \left[\frac{\partial^2 \log H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial v^2}\right] du dv,$$

ou :

$$\int \frac{ds}{R_g} = \int d\varphi - \int\int \frac{H}{R_1 R_2} . du dv = \int d\varphi - \int\int \frac{d\mathcal{A}}{R_1 R_2},$$

d'où la *formule d'Ossian Bonnet :*

$$\mathcal{A}' = \int\int \frac{d\mathcal{A}}{R_1 R_2} = \int d\varphi - \int \frac{ds}{R_g}.$$

Remarque. — L'angle φ est l'angle de MU avec la tangente MT à la courbe. Supposons qu'en chaque point de la surface on détermine, comme au ch. II, § 4 (page 33), une direction MO, dont les cosinus directeurs sont des fonctions bien déterminées de u, v. Soit $\psi = (\mathrm{MO}, \mathrm{MU})$ et $\varphi_0 = (\mathrm{MO}, \mathrm{MT})$. Alors :

$$\varphi_0 = \psi + \varphi,$$

d'où :

$$d\varphi_0 = d\psi + d\varphi.$$

Intégrons le long d'un contour fermé quelconque :

$$\int d\varphi_0 = \int d\psi + \int d\varphi ;$$

or Ψ est une fonction de u, v, et le long d'un contour fermé :

$$\int d\psi(u, v) = 0 ;$$

donc :

$$\int d\varphi_0 = \int d\varphi,$$

et l'on peut substituer à l'angle φ l'angle φ_0 précédemment défini.

On voit ainsi intervenir, dans l'étude de la courbure totale, l'élément géométrique $\left(\frac{ds}{R_g} - d\varphi_0\right)$, introduit au ch. II, p. 34. (Cf. ch. III, p. 56).

Triangles géodésiques

Nous appellerons *triangle géodésique* la figure formée par trois lignes géodésiques. Le long de chacun des côtés :

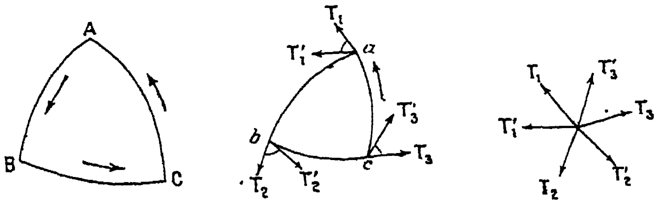
$$\int \frac{ds}{R_g} = \int \frac{\sin\theta}{R}\, ds = 0,$$

et la formule d'O. Bonnet nous donne :

$$\mathcal{A}' = \int d\varphi,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}' = \int_{AB} d\varphi + \int_{BC} d\varphi + \int_{CA} d\varphi.$$



Les coordonnées orthogonales et isothermes fournissent une représentation conforme de la surface sur le plan des uv. Considérons donc sur ce plan la représentation abc du triangle ABC. Menons aux extrémités a, b, c les tangentes aux côtés dans le sens direct ; soient T_1, T_2, T_3, T'_1, T'_2, T'_3 ces tangentes. Le signe $\equiv$ indiquant que les égalités ont lieu à un multiple près de 2π, nous aurons :

$$\int_{AB} d\varphi \equiv (T'_1, T_2), \qquad \int_{BC} d\varphi \equiv (T'_2, T_3), \qquad \int_{CA} d\varphi \equiv (T'_3, T_1) ;$$

Donc si nous appelons a, b, c les angles du triangle géodésique, nous avons pour la valeur de $\mathcal{A}'$:

$$(T'_1, T_2) + (T'_2, T_3) + (T'_3, T_1) \equiv -[(T_1, T'_1) + (T_2, T'_2) + (T_3, T'_3)]$$
$$+ [(T_1, T_2) + (T_2, T_3) + (T_3, T_1)]$$
$$\equiv 2\pi - [(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c)] \equiv a + b + c - \pi,$$

d'où la *formule de Gauss* :

$$a + b + c - \pi = \mathcal{A}',$$

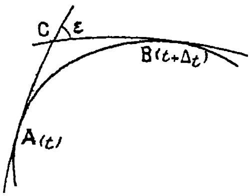
où nous avons remis le signe $=$, car les deux membres tendent vers zéro si les trois sommets du triangle ABC tendent vers un même point.

Si en particulier la surface est une sphère de rayon R, on obtient la formule qui donne l'aire d'un triangle sphérique :

$$\mathcal{A} = R^2\mathcal{A}' = R^2(a + b + c - \pi).$$

Nouvelle définition de la courbure géodésique

Considérons un arc de courbe AB ; menons en AB les géodésiques tangentes à cette courbe, qui se coupent en C' sous un angle ε que nous appellerons *angle de contingence géodésique*. Le long du contour de ce triangle :



$$\int d\varphi = -\varepsilon,$$

et la formule d'O. Bonnet nous donne :

$$-\varepsilon - \int_{AB} \frac{ds}{R_g} = \int\int d\mathcal{A}'.$$

Supposons que A corresponde au paramètre t, B à $t + \Delta t$, et que Δt tende vers o ; soit Δs l'arc AB. Nous avons :

$$-\frac{\varepsilon}{\Delta s} - \frac{1}{\Delta s}\int_{AB} \frac{ds}{R_g} = \frac{1}{\Delta s}\int\int d\mathcal{A}'.$$

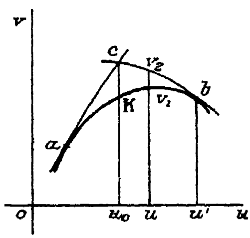
Soit $\left(\frac{1}{R_g}\right)_m$ la valeur moyenne de la courbure géodésique sur l'arc AB ;

$$\frac{1}{\Delta s}\int_{AB} \frac{ds}{R_g} = \left(\frac{1}{R_g}\right)_m,$$

et par suite :

$$-\frac{\varepsilon}{\Delta s} - \left(\frac{1}{R_g}\right)_m = \frac{1}{\Delta s}\int\int d\mathcal{A}'.$$

Si Δs tend vers o, $\left(\frac{1}{R_g}\right)_m$ a pour limite la courbure géodésique au point A. Je dis que le deuxième membre a pour limite o ; il suffit de montrer que $\int\int d\mathcal{A}'$ est infiniment petit du deuxième ordre au moins. Considérons la représentation $a\,b\,c$ du triangle ABC sur le plan des uv.



$$\int\int d\mathcal{A}' = \int\int \psi(u, v)dudv = [\psi(u, v)]_m \int\int dudv\,;$$

et, au signe près, $\int\int dudv$ est égale à l'intégrale curviligne $\int vdu$, d'après le théorème de Green.

Soient v_2, v_1 les expressions de v, en fonction de u, sur les arcs bc et bk. La partie de l'intégrale $\int v du$ donnée par ces arcs est $\int_{u_0}^{u'} (v_2 - v_1)du$. Or les courbes ab et bc étant tangentes en b, $v_2 - v_1$ est infiniment petit du deuxième ordre au moins par rapport à $u' - u$ et *à fortiori* par rapport à $(u' - u_0)$. L'intégrale $\int_{u_0}^{u'} (v_2 - v_1)du$, qui est égale au produit de $(u' - u_0)$ par la valeur moyenne de $v_2 - v_1$ sera donc du troisième ordre au moins par rapport à $(u' - u_0)$, et par suite par rapport à Δs. Le même raisonnement s'appliquant aux autres arcs ac et ak, on voit que $\int\int d\mathfrak{b}'$ est du troisième ordre au moins, et la propriété est établie.

La courbure géodésique peut donc se définir comme la courbure en géométrie plane : *la limite du rapport de l'angle de contingence (géodésique) à l'arc de la courbe*, lorsque ce dernier tend vers zéro.

Surfaces à courbure totale constante

6. — Nous avons vu que les surfaces à courbure totale constamment nulle sont le plan et les surfaces développables (§ 3). Considérons, maintenant, les surfaces à courbure totale constante non nulle. Parmi elles figurent les sphères, une sphère de rayon R ayant pour courbure totale $\frac{1}{R^2}$. Cherchons, sous la forme :

$$ds^2 = 2F du.dv,$$

l'élément linéaire des surfaces à courbure totale constante $\frac{1}{R_1R_2} = k$.

D'après la formule (21) (§ 3) :

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u.\partial v},$$

cela revient à intégrer l'équation aux dérivées partielles (*équation de Liouville*) :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u.\partial v} = -kF.$$

La solution fournie par les sphères de rayon R, pour $k = \frac{1}{R^2}$, permet de prévoir quelle en est l'intégrale générale.

Rapportons, en effet, la sphère de rayon R, qui a l'origine pour

centre, à ses lignes minima, c'est-à-dire à ses génératrices rectilignes Des équations de celles-ci :

$$x + iy = u(\mathrm{R} - z), \qquad x - iy = \frac{1}{u}(\mathrm{R} + z),$$

$$x + iy = v(\mathrm{R} + z), \qquad x - iy = \frac{1}{v}(\mathrm{R} - z),$$

on déduit immédiatement les équations paramétriques de la sphère :

$$(2) \qquad x + iy = \frac{2\mathrm{R}uv}{u+v}, \qquad x - iy = \frac{2\mathrm{R}}{u+v}, \qquad z = \mathrm{R}\frac{u-v}{u+v};$$

d'où on tire, pour :

$$ds^2 = d(x + iy).d(x - iy) + dz^2,$$

la valeur :

$$(3) \qquad ds^2 = -\frac{4\mathrm{R}^2 du dv}{(u+v)^2}.$$

Le changement de coordonnées curvilignes le plus général qui conserve les lignes minima comme courbes coordonnées est :

$$u = \mathrm{V}(u_1), \qquad v = \mathrm{V}(v_1),$$

U, V étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. En effectuant ce changement dans la formule (3), et remettant les lettres u, v, à la place de u_1, v_1, on obtient l'expression :

$$(4) \qquad ds^2 = -\frac{4\mathrm{R}^2\mathrm{U}'\mathrm{V}'}{(\mathrm{U}+\mathrm{V})^2}\, du dv,$$

pour le ds^2 de toute sphère de rayon R, rapportée à ses lignes minima.

L'équation (1) est vérifiée, par suite, par :

$$(5) \qquad \mathrm{F} = -\frac{2\mathrm{U}'\mathrm{V}'}{k(\mathrm{U}+\mathrm{V})^2};$$

et, comme U et V sont deux fonctions arbitraires, on prévoit que c'est là l'intégrale générale de (1).

Nous le démontrerons par l'intégration directe de (1). Posons :

$$(6) \qquad -k\mathrm{F} = w,$$

ce qui réduit l'équation (1) à l'équation :

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \log w}{\partial u . \partial v} = w.$$

Celle-ci équivaut, en introduisant une inconnue auxiliaire φ, au système :

$$(8) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = w, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \varphi w;$$

d'où on conclut :

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial v}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \varphi^2}{\partial u} = \frac{\partial (2w)}{\partial v};$$

de sorte que, en désignant par ψ une nouvelle inconnue auxiliaire, l'équation (7) équivaut au système :

$$(9) \qquad 2w = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \varphi^2 = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = w = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

De ces équations résulte, en intégrant la dernière :

$$\varphi = \frac{1}{2}\psi + V_o,$$

V_o étant une fonction de v seul ; et, par suite :

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}\psi + V_o\right)^2.$$

Cette équation étant une équation de Riccati — [Cf. Ch. V, § 10] —, ψ est de la forme :

$$\psi = \frac{UV_1 + V_2}{U + V},$$

où U, fonction de u seul, joue le rôle de constante d'intégration par rapport à v ; et où V, V_1, V_2 sont des fonctions de v seul.

Et la première des équations (9) donne alors :

$$w = \frac{U'V_3}{2(U+V)^2} \qquad (V_3 = V_1V - V_2).$$

Si on porte cette valeur dans l'équation (7), on trouve immédiatement $V_3 = 4V'$, et U et V demeurent arbitraires. On a donc bien la formule (5) comme intégrale générale de (1).

Donc *le* ds² *de toute surface à courbure totale constante* $\frac{1}{R_1R_2} = k$, *rapportée à ses lignes minima, est :*

$$(10) \qquad ds^2 = -\frac{2U'V'}{k(U+V)^2}\, du.dv;$$

et peut, par un choix convenable des coordonnées, se réduire à la forme type :

$$(1) \qquad ds^2 = -\frac{2\, dudv}{k(u+v)^2}.$$

Il résulte de là que, *pour que deux surfaces à courbure totale constante soient applicables l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'elles aient la même courbure.* La question de la réalité de la correspondance qui réalise l'application d'une surface sur l'autre est, du reste, réservée, dans cet énoncé.

Pseudosphère. — Les sphères de rayon R servent d'exemples, pour les surfaces à courbure totale constante positive $k = \frac{1}{R^2}$. Cherchons une surface de révolution à courbure constante négative $k = -\frac{1}{R^2}$. Soit Oz l'axe de révolution ; M un point de la méridienne principale, située dans le plan zOx ; x, z ses coordonnées ; et soit $\theta = (Ox, MT)$ l'angle de la demi-tangente positive MT avec Ox, compté positivement de Ox vers Oz. La demi-normale positive MN étant définie par $(Ox, MN) = \theta + \frac{\pi}{2}$, le centre de courbure C_1 de la méridienne principale, qui est l'une des sections principales de la surface, est donné par la formule :

$$MC_1 = \frac{ds}{d\theta} = \frac{dx}{\cos\theta\, d\theta},$$

vraie en grandeur et signe.

La seconde section principale étant tangente au parallèle du point M, le théorème de Meusnier montre que son centre de courbure C_2 est à l'intersection de Oz et de la normale à la méridienne ; et on a, en grandeur et signe :

$$MC_2 = \frac{x}{\sin\theta}.$$

L'équation du problème, $MC_1 . MC_2 = R_1R_2 = -R^2$, s'écrit donc :

$$x dx = -R^2 \sin\theta \cos\theta . d\theta.$$

Bornons-nous à la solution :

$$x = -R\cos\theta. \tag{12}$$

Si on désigne par S le point où la tangente rencontre Oz, on a, en grandeur et signe :

$$MS = -\frac{x}{\cos\theta};$$

l'équation (12) exprime donc que *la méridienne cherchée est la courbe aux tangentes égales, ou tractrice.* On achève de la déterminer en intégrant :

$$dz = \operatorname{tg}\theta . dx = R\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)d\theta;$$

on peut supprimer la constante d'intégration, à condition de choisir convenablement l'origine O sur l'axe de révolution ; et il vient :

$$x = -R\cos\theta, \qquad z = R\left[\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin\theta\right] \tag{13}$$

pour les équations de la méridienne (tractrice) cherchée.

La surface de révolution qu'elle engendre, en tournant autour de sa base Oz, *s'appelle une pseudo-sphère.*

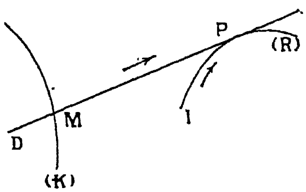
Remarque. — L'importance des surfaces à courbure totale constante tient à ce que, comme le plan, elles sont applicables sur elles-mêmes d'une infinité de manières : une telle surface peut ainsi glisser sur elle-même, par ∞^3 mouvements continus, dans lesquels la surface peut se déformer, mais de manière que tout arc de courbe, tracé sur la surface, conserve la même longueur. De là résultent des *géométries* sur ces surfaces, dites *géométries non euclidiennes*, analogues à la géométrie plane, mais dans lesquelles la somme des angles d'un triangle est, d'après ce qui précède (les lignes géodésiques jouant le rôle des droites du plan), supérieure ou inférieure à π, suivant que la courbure totale est positive ou négative (géométrie sphérique et géométrie pseudo-sphérique).

CHAPITRE V

SURFACES RÉGLÉES

Surfaces développables

1. — Pour définir la variation de la droite qui engendre la surface réglée, nous nous donnerons la trajectoire d'un point M de cette droite, et la direction de cette droite pour chaque position du point M. Les coordonnées d'un point de la surface sont ainsi exprimées en fonction de deux paramètres, l'un définissant la position du point M sur sa trajectoire (K), l'autre définissant la position du point P considéré sur la droite (D). Soient :



$$x = f(v), \quad y = g(v), \quad z = h(v),$$

les expressions des coordonnées d'un point de la courbe K. Soient $l_0(v)$, $m_0(v)$, $n_0(v)$ les coefficients de direction de la génératrice (D), et u le rapport du vecteur MP au vecteur de composantes l_0, m_0, n_0. Les coordonnées de P sont :

$$(1) \quad x = f(v) + u.l_0(v), \quad y = g(v) + u.m_0(v), \quad z = h(v) + u.n_0(v).$$

Cherchons la condition pour que la surface définie par les équations précédentes soit développable. Si nous exceptons les cas du cylindre et du cône, la condition nécessaire et suffisante est que les génératrices soient tangentes à une même courbe gauche. On doit donc pouvoir trouver sur la génératrice (D) un point P tel que sa trajectoire soit constamment tangente à (D) ; les coordonnées x, y, z d'un tel point doivent être telles que :

$$\frac{dx}{l_0} = \frac{dy}{m_0} = \frac{dz}{n_0} = d\rho \, ;$$

d'où :

$$(2) \qquad dx = l_0 d\rho, \qquad dy = m_0 d\rho, \qquad dz = n_0 d\rho,$$

Mais les équations (1) donnent :

$$dx = df + udl_0 + l_0du, \quad dy = dg + udm_0 + m_0du,$$
$$dz = dh + udn_0 + n_0du$$

et les équations (2) s'écrivent :

$$\begin{aligned} df + udl_0 + l_0(du - d\rho) &= 0, \\ dg + udm_0 + m_0(du - d\rho) &= 0, \\ dh + udn_0 + n_0(du - d\rho) &= 0 ; \end{aligned}$$

ou, en posant :

$$(3) \qquad d\sigma = du - d\rho,$$

$$(4) \qquad df + udl_0 + l_0d\sigma = 0, \quad dg + udm_0 + m_0d\sigma = 0,$$
$$dh + udn_0 + n_0d\sigma = 0 ;$$

$d\sigma$ et u doivent satisfaire à ces trois équations linéaires ; donc le déterminant de ces équations doit être nul :

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} df & dl_0 & l_0 \\ dg & dm_0 & m_0 \\ dh & dn_0 & n_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si les trois déterminants déduits du tableau :

$$\begin{Vmatrix} dl_0 & dm_0 & dn_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \end{Vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls, il existe des valeurs de u et de $d\sigma$ satisfaisant aux équations (4), et la condition (5) est suffisante. Si ces trois déterminants sont identiquement nuls, c'est que :

$$\frac{dl_0}{l_0} = \frac{dm_0}{m_0} = \frac{dn_0}{n_0}$$

et l'intégration de ces équations nous montre que l_0, m_0, n_0 sont proportionnels à des quantités fixes ; la surface est alors un cylindre. En écartant ce cas, la condition (5) est nécessaire et suffisante.

Remarque 1. — Pour que le point P décrive effectivement une courbe, il faut que dx, dy, dz, et par suite $d\rho$, ne soient pas identiquement nuls. Si $d\rho$ était identiquement nul, toutes les génératrices passeraient par un point fixe, la surface serait un cône. La condition (5) s'applique donc au cas du cône.

Remarque 2. — On emploie souvent les équations de la génératrice sous la forme :

$$x = Mz + P, \qquad y = Nz + Q,$$

M, N, P, Q, étant fonctions d'un paramètre arbitraire. C'est un cas par-

ticulier de la représentation générale (1) dans laquelle on fait $h(v) = 0$ et $n_0(v) = 1$; alors $z = u$, et :

$$(6) \qquad x = f(v) + z . l_0(v) ; \qquad y = g(v) + z . m_0(v) ;$$

les coefficients de direction sont l_0, m_0, 1. La courbe (K) est alors la section par le plan $z = 0$; dans ce cas la condition (5) prend la forme simple :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} df & dl_0 \\ dg & dm_0 \end{vmatrix} = 0, \text{ c'est-à-dire } \begin{vmatrix} dM & dP \\ dN & dQ \end{vmatrix} = 0.$$

Propriétés des développables

Revenons au cas général ; supposons que l_0, m_0, n_0 soient les cosinus directeurs de la génératrice ; alors :

$$l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1,$$

d'où :

$$l_0 dl_0 + m_0 dm_0 + n_0 dn_0 = 0.$$

Multiplions les équations (4) respectivement par dl_0, dm_0, dn_0, et ajoutons, il vient :

$$u = -\frac{\Sigma dl_0 df}{\Sigma dl_0^2}.$$

Supposons en outre que la génératrice (D) soit normale à la courbe (K). Il est toujours possible, en effet, de trouver sur une surface réglée des trajectoires orthogonales des génératrices. Il suffit que x, y, z soient tels que :

$$\Sigma l_0 dx = 0,$$

ou :

$$\Sigma l_0 df + u \Sigma l_0 dl_0 + \Sigma l_0^2 du = 0 ;$$

Comme on a ici :

$$\Sigma l_0^2 = 1, \quad \Sigma l_0 dl_0 = 0$$

cette condition se réduit à

$$\Sigma l_0 df + du = 0 ;$$

et la détermination des trajectoires orthogonales se fait au moyen d'une quadrature.

Si donc nous supposons (K) normale à la génératrice, nous aurons

$$\Sigma l_0 df = 0.$$

Multiplions alors les équations (4) respectivement par l_0, m_0, n_0 et ajoutons, nous obtenons $d\sigma = 0$, d'où $d\rho = du$, et les équations (2) deviennent :

$$dx = l_0 du, \quad dy = m_0 du, \quad dz = n_0 du.$$

Mais, l_0, m_0, n_0 étant les cosinus directeurs de la tangente à l'arête de rebroussement (R), u représente l'arc de cette courbe compté dans le sens positif choisi sur la génératrice à partir d'une origine arbitraire I ; et comme u représente aussi le segment MP, on voit que :

$$d.\mathrm{MP} = d.(\text{arc IP})\,;$$

d'où :

$$\mathrm{MP} = \text{arc IP} + \mathrm{c^{te}}.$$

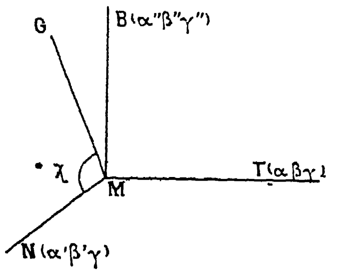
On peut toujours choisir l'origine I des arcs de façon que la constante soit nulle. Alors MP = arc IP. La courbe (K) est une développante de la courbe (R). *Sur une surface développable, les trajectoires orthogonales des génératrices sont des développantes de l'arête de rebroussement.*

Les formules (4) donnent alors :

$$(4') \quad df + u\,dl_0 = 0, \quad dg + u\,dm_0 = 0, \quad dh + u\,dn_0 = 0.$$

Développées des courbes gauches

2. — Supposons qu'on se donne la courbe (K), et cherchons à mener à cette courbe une normale en chacun de ses points de façon à obtenir une surface développable. Nous prendrons pour variable v l'arc s de la courbe (K). Considérons le trièdre de Serret au point M de la courbe. Soit MG la normale cherchée ; elle est dans le plan normal à la courbe ; pour la définir, il suffira donc de se donner l'angle (MN, MG) $= \chi$. Le point à l'unité de distance sur MG a pour coordonnées



par rapport au trièdre de Serret o, $\cos\chi$, $\sin\chi$; si donc l_0, m_0, n_0 sont les cosinus directeurs de MG :

$$\begin{cases} l_0 = \alpha'\cos\chi + \alpha''\sin\chi \\ m_0 = \beta'\cos\chi + \beta''\sin\chi \\ n_0 = \gamma'\cos\chi + \gamma''\sin\chi. \end{cases}$$

Or v étant l'arc de la courbe (K),

$$df = \alpha dv, \qquad dg = \beta dv, \qquad dh = \gamma dv\,;$$

les formules (4') donnent alors, en tenant compte des formules de Frenet :

$$\alpha dv + u\left[(-\alpha'\sin\chi + \alpha''\cos\chi)d\chi - \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right)\cos\chi.dv + \frac{\alpha'}{T}\sin\chi.dv\right] = 0,$$

ou

$$\alpha\left[1-\frac{u}{R}\cos\chi\right]+\alpha' u\left[\frac{1}{T}-\frac{d\chi}{dv}\right]\sin\chi+\alpha'' u\left[\frac{d\chi}{dv}-\frac{1}{T}\right]\cos\chi=0,$$

et deux équations analogues avec β, β', β'' et γ, γ', γ'' ; nous avons ainsi trois équations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients de α, α', α'' ; β, β', β'' ; γ, γ', γ''. Le déterminant de ces équations est 1, donc les inconnues sont toutes nulles ; et comme u n'est pas constamment nul,

$$1-\frac{u\cos\chi}{R}=0, \qquad \sin\chi\left[\frac{d\chi}{dv}-\frac{1}{T}\right]=0, \qquad \cos\chi\left[\frac{d\chi}{dv}-\frac{1}{T}\right]=0.$$

Les deux dernières donnent, en remplaçant v par l'arc s :

$$(1) \qquad \frac{d\chi}{ds}=\frac{1}{T},$$

et la première donne :

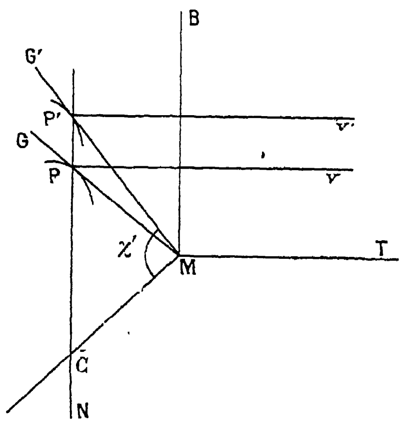
$$(2) \qquad u=\frac{R}{\cos\chi}$$

Il y a donc une infinité de solutions : χ se détermine par une quadrature.

La formule (2) nous montre que :

$$R=u\cos\chi;$$

donc la projection du point P, où la normale MG touche son enveloppe, sur la normale principale, est le centre de courbure C. *Le point de contact de la normale avec son enveloppe est sur la droite polaire. Les développées d'une courbe sont sur la surface polaire.*



Considérons deux solutions χ, χ' de l'équation (1), la différence $\chi-\chi'$ est constante ; les deux normales MG, MG' se coupent sous un angle constant. Donc, *lorsque une normale à une courbe décrit une surface développable, si on la fait tourner dans chacune de ses positions d'un angle constant autour de la tangente, la droite obtenue décrit encore une développable.*

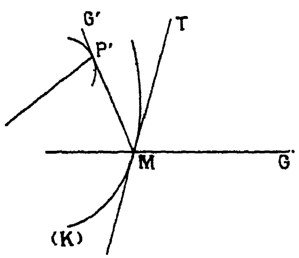
Le plan osculateur à une développée est le plan tangent à la développable correspondante : c'est le plan GMT; ce plan est normal au plan BMC, plan tangent à la surface polaire. *Donc les développées sont des géodésiques de la surface polaire.*

Considérons la normale principale Pν en P à la développée, elle est dans le plan osculateur GMT, elle est perpendiculaire à la tangente MP, donc parallèle à MT. *Les normales principales aux développées d'une courbe sont parallèles aux tangentes à la courbe. Le plan normal à la courbe est le plan rectifiant de toutes ses développées.*

En partant d'une courbe (R), et remarquant que la courbe donnée (K) en est la développante, on pourra énoncer les propriétés précédentes de façon à obtenir des propriétés des développantes d'une courbe.

Lignes de courbure

3. — Considérons sur une surface (S) une ligne de courbure (K), et la développable circonscrite à (S) le long de (K). La direction d'une génératrice MG de cette développable est conjuguée de la tangente MT à la ligne de courbure, et par conséquent est perpendiculaire à MT, c'est-à-dire normale à (K). Cette génératrice MG est donc constamment tangente à une développée de la ligne de courbure, et nous voyons que *les normales à une ligne de courbure tangentes à la surface engendrent une développable.* La réciproque s'établirait par un raisonnement analogue.



Faisons tourner MG d'un angle droit autour de la tangente, nous obtenons une droite MG' qui, étant perpendiculaire aux deux tangentes à la surface MT, MG, sera la normale à la surface. Donc *les normales à la surface en tous les points d'une ligne de courbure engendrent une développable et réciproquement.*

Considérons le point P' où la droite MG' touche son enveloppe ; c'est le point où la droite polaire de la ligne de courbure rencontre la normale à la surface. Or, d'après le Théorème de Meusnier, les droites polaires de toutes les courbes de la surface tangentes en M rencontrent la normale en M en un même point, qui est le centre de courbure de la section normale correspondante : P' est donc le centre de courbure de la section principale G'MT, c'est l'un des centres de courbure principaux de la surface au point M.

Reprenons alors, pour la normale MG'. les formules (4') du § 1, que nous écrirons :

$$dx + ud\lambda = 0, \qquad dy + ud\mu = 0, \qquad dz + ud\nu = 0\,;$$

en y remplaçant f, g, h, par les coordonnées x, y, z du point M, et l_0, m_0, n_0 par les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale à la surface : u est le rayon de courbure principal R. Nous obtenons donc, pour un déplacement sur une ligne de courbure, les *formules d'Olinde Rodrigues* :

$$dx + \mathrm{R}d\lambda = 0, \qquad dy + \mathrm{R}d\mu = 0, \qquad dz + \mathrm{R}d\nu = 0.$$

Les *Théorèmes de Joachimsthal* se déduisent aisément de ce qui précède. Supposons que l'intersection (K) de deux surfaces (S), (S_1) soit une ligne de courbure pour chacune d'elles. Soient MG', MG'_1 les normales aux deux surfaces en un point M de (K). Elles engendrent deux développables, donc enveloppent deux développées de (K), et par suite leur angle est constant. *Réciproquement,* si l'intersection (K) de (S), (S_1) est ligne de courbure de (S_1), et si l'angle des deux surfaces est constant tout le long de (K), la normale MG'_1 à (S_1) engendre une développable, et comme MG' fait avec MG'_1 un angle constant, elle engendre aussi une développable, donc (K) est une ligne de courbure sur (S).

Équation différentielle des lignes de courbure. — La condition (5) pour qu'une droite engendre une surface développable, appliquée à la normale MG', s'écrit ici :

$$\begin{vmatrix} dx & d\lambda & \lambda \\ dy & d\mu & \mu \\ dz & d\nu & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}.\,du + \frac{\partial x}{\partial v}.\,dv & \frac{\partial \lambda}{\partial u}\,du + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\,dv & \lambda \\ \cdots & \cdots & \mu \\ \cdots & \cdots & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \lambda \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \mu \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \nu \end{vmatrix}$$

qui n'est pas nul.

Nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & -L du - M dv & 0 \\ F du + G dv & -M du - N dv & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

et nous retrouvons ainsi l'*équation différentielle des lignes de courbure :*

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & L du + M dv \\ F du + G dv & M du + N dv \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — Si l'équation de la surface est prise sous la forme $z = f(x, y)$, les équations de la normale étant :

$$X = (x + pz) - pZ, \qquad Y = (y + qz) - qZ,$$

la même méthode, appliquée en se servant de la condition (7) [§ 1] :

$$\begin{vmatrix} dM & dP \\ dN & dQ \end{vmatrix} = 0$$

donne facilement l'équation différentielle :

$$\begin{vmatrix} dx + p dz & dp \\ dy + q dz & dq \end{vmatrix} = 0.$$

Développement d'une surface développable sur un plan

4. — *Toute surface développable est applicable sur un plan.*

Ce théorème, et sa réciproque, ont été obtenus, incidemment, au ch. IV, § 3.

Nous allons les établir directement, et étudier le développement effectif d'une surface développable sur un plan.

Il faut observer, en effet, que, dans les correspondances considérées au ch. II (§ 2), nous n'avons pas discuté la réalité des couples de points homologues.

Considérons d'abord le cas du cylindre, dont les équations sont :

$$x = f(v) + u.l_0, \qquad y = g(v) + u.m_0, \qquad z = h(v) + u.n_0;$$

l_0, m_0, n_0 étant constants. Nous en déduisons :

$$dx = f'(v)dv + l_0.du, \quad dy = g'(v)dv + m_0.du, \quad dz = h'(v)dv + n_0.du,$$

d'où :

$$ds^2 = \Sigma f'^2(v)dv^2 + 2\Sigma l_0 f'(v).dudv + \Sigma l_0^2.du^2.$$

Nous supposerons que la directrice :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v)$$

est une section droite, en sorte que $\Sigma l_0 f' = 0$; puis que l_0, m_0, n_0 sont cosinus directeurs, d'où $\Sigma l_0^2 = 1$; enfin que v est l'arc sur la section droite : d'où $\Sigma f'^2 = 1$. Alors :

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + dv^2 \,;$$

ce qui est l'élément linéaire d'un plan en coordonnées rectangulaires. *Un cylindre est applicable sur un plan*, et (1) donne la loi bien connue du développement.

Voyons maintenant le cas du cône :

$$x = u.l_0(v), \qquad y = u.m_0(v), \qquad z = u.n_0(v) \;;$$

u est la longueur prise sur la génératrice à partir du sommet ; supposons que l_0, m_0, n_0 soient cosinus directeurs de la génératrice, v étant l'arc de la courbe sphérique $u = 1$, intersection du cône avec la sphère de rayon un. Alors :

$$dx = ul'_0(v)dv + l_0(v)du, \qquad dy = um'_0(v)dv + m_0(v)du,$$
$$dz = un'_0(v)dv + n_0(v)du \,;$$

et :

$$(2) \qquad ds^2 = u^2dv^2 + du^2.$$

C'est l'élément linéaire d'un plan en coordonnées polaires. *Un cône est applicable sur un plan ;* (2) donne la loi, bien connue, du développement.

Passons enfin au cas général :

$$x = f(v) + u.l_0(v), \qquad y = g(v) + u.m_0(v), \qquad z = h(v) + u.n_0(v).$$

Nous supposerons que la courbe $x = f(v)$, $y = g(v)$, $z = h(v)$ soit l'arête de rebroussement, v l'arc sur cette courbe, l_0, m_0, n_0 les cosinus directeurs de la tangente en un point, et u la distance comptée sur cette tangente à partir du point de contact. Alors :

$$l_0 = f' = \alpha \,; \qquad m_0 = g' = \beta \,; \qquad n_0 = h' = \gamma \,;$$

et :

$$l'_0 = \frac{d\alpha}{dv} = \frac{\alpha'}{R}, \quad m'_0 = \frac{d\beta}{dv} = \frac{\beta'}{R}, \quad n'_0 = \frac{d\gamma}{dv} = \frac{\gamma'}{R}.$$

D'où :

$$dx = \alpha dv + u\frac{\alpha'}{R}dv + \alpha du, \; dy = \beta dv + u\frac{\beta'}{R}dv + \beta du, \; dz = \gamma dv + u\frac{\gamma'}{R}dv + \gamma du$$

et :

$$ds^2 = [d(u + v)]^2 + \frac{u^2}{R^2} dv^2.$$

Cet élément reste le même si R garde la même expression en fonction de v. Donc *l'élément linéaire est le même pour toutes les surfaces développables dont les arêtes de rebroussement sont des courbes dont le rayon de courbure a la même expression en fonction de l'arc :*

$$R = \Phi(v).$$

Nous pouvons déterminer une courbe plane dont le rayon de courbure s'exprime en fonction de l'arc par l'équation précédente. Nous prendrons pour coordonnées dans le plan de cette courbe l'arc s de la courbe, et la distance comptée sur la tangente à partir du point de contact : l'élément linéaire du plan aura alors la forme précédente. La développable sera donc applicable sur ce plan. Quand la développable est donnée, on détermine par des opérations algébriques son arête de rebroussement, et par une quadrature l'arc de cette arête de rebroussement. Alors son rayon de courbure est déterminé par une équation de la forme :

$$R = \Phi(s).$$

Il faut construire une courbe plane satisfaisant à cette condition. Si θ est l'angle de la tangente avec Ox, on sait que :

$$R = \frac{ds}{d\theta};$$

d'où :

$$\frac{ds}{d\theta} = \Phi(s),$$

$$\theta = \int \frac{ds}{\Phi(s)};$$

et alors :

$$dx = \cos\theta\, ds, \qquad dy = \sin\theta\, ds;$$

x, y se déterminent au moyen de trois quadratures. La courbe que l'on obtient est homologue de l'arête de rebroussement dans le développement.

Réciproque

Réciproquement toute surface applicable sur un plan est une surface développable.

Soit la surface :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

que nous supposons applicable sur un plan. Nous avons, en choisissant convenablement les coordonnées u, v :

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}.dudv + \mathrm{G}dv^2 = du^2 + dv^2 ;$$

d'où :

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

Différentions ces relations successivement par rapport à u, v, nous obtenons :

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \qquad \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = 0, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = 0,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = 0, \qquad \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0 ;$$

d'où nous tirons :

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Or, considérons les équations :

$$\mathrm{X}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0,$$

$$\mathrm{X}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0 ;$$

d'après les relations précédemment écrites, ce système admet les deux solutions :

$$\mathrm{X} = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{\partial z}{\partial u} ;$$

$$\mathrm{X} = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Ces solutions ne sont pas proportionnelles, sans quoi les courbes $u = c^{te}$ et $v = c^{te}$ seraient constamment tangentes. Donc les trois déterminants déduits du tableau :

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} \end{matrix}\right\|$$

sont nuls ; or ce sont les déterminants fonctionnels des trois quantités $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ prises deux à deux, donc ces trois quantités sont fonctions

de l'une d'entre elles, c'est-à-dire d'une seule variable t. De même $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ sont fonctions d'une seule variable θ. De plus la relation :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

montre que θ par exemple s'exprime en fonction de t.

Les six dérivées partielles sont donc fonctions d'une même variable ; il en est donc de même des dérivées, $p = -\frac{D(y, z)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $q = -\frac{D(z, x)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, de z considéré comme fonction d'x et d'y. La surface est donc développable [Ch. III, p. 46].

Remarque I. — Dans le développement, les lignes géodésiques se conservent ; or les géodésiques du plan sont des droites. *Les lignes géodésiques de la surface développable sont donc les lignes qui, dans le développement de cette surface sur un plan, correspondent aux droites de ce plan.*

En particulier, considérons la surface rectifiante d'une courbe, enveloppe du plan rectifiant. Cette courbe est une géodésique de sa surface rectifiante, puisque son plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent; elle se développe donc suivant une droite lorsqu'on effectue le développement de la surface rectifiante sur un plan. *De là le nom de plan rectifiant.*

Remarque II. — Il résulte de là que la recherche des géodésiques d'une surface développable se ramène à son développement, et par conséquent à quatre quadratures.

Remarque III. — La détermination des lignes de courbure, développantes de l'arête de rebroussement, se ramène à une quadrature.

Lignes géodésiques d'une surface développable

5. — Nous avons ramené la recherche des lignes géodésiques d'une surface développable au développement de cette surface sur un plan. On peut les chercher directement. Soit l'arête de rebroussement :

$$(1) \qquad x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s),$$

s désignant l'arc. Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la tangente, et u une longueur comptée sur cette tangente à partir du point de contact, la surface est représentée par les équations :

$$x = f + u\alpha, \qquad y = g + u\beta, \qquad z = h + u\gamma.$$

On en déduit, en désignant par u' et u'' les dérivées première et seconde de u par rapport à s :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha + u\frac{\alpha'}{R} + \alpha u', \qquad \frac{dy}{ds} = \ldots, \qquad \frac{dz}{ds} = \ldots;$$

ou :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha(1 + u') + \alpha'\frac{u}{R}, \qquad \frac{dy}{ds} = \ldots, \qquad \frac{dz}{ds} = \ldots;$$

et :

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \alpha\left(u'' - \frac{u}{R^2}\right) + \alpha'.\frac{1}{R}\left(1 + 2u' - u\frac{R'}{R}\right) - \alpha''\frac{u}{RT},$$

et les analogues.

L'équation des lignes géodésiques est, en remarquant que la normale à la surface n'est autre que la binormale à l'arête de rebroussement :

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$\begin{vmatrix} \alpha\left(u'' - \frac{u}{R^2}\right) + \frac{\alpha'}{R}\left(1 + 2u' - u\frac{R'}{R}\right) - \alpha''\frac{u}{RT} & \ldots & \ldots \\ \alpha(1 + u') + \alpha'\frac{u}{R} & \ldots & \ldots \\ \alpha'' & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est le produit de deux déterminants, et l'équation s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u'' - \frac{u}{R^2} & \frac{1}{R}\left(1 + 2u' - u\frac{R'}{R}\right) & -\frac{u}{RT} \\ 1 + u' & \frac{u}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$\frac{u}{R}\left(u'' - \frac{u}{R^2}\right) - \frac{1}{R}\left(1 + u'\right)\left(1 + 2u' - u\frac{R'}{R}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(2) \qquad u.u'' - 2u'^2 - u'\left(3 - u\frac{R'}{R}\right) - \frac{u^2}{R^2} + u.\frac{R'}{R} - 1 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle qui détermine u.

Cherchons la nature de l'intégrale générale. Si nous développons la surface sur un plan, la courbe (1) sera représentée par une courbe :

$$X = F(s), \qquad Y = G(s),$$

dont le rayon de courbure sera encore R. Le point homologue du point (u, s) de la surface sera :

$$X = F + uF', \qquad Y = G + uG'.$$

Et les droites du plan seront définies par l'équation générale :

$$A(F + uF') + B(G + uG') + C = 0,$$

d'où :

$$u = -\frac{AF + BG + C}{AF' + BG'};$$

en remarquant que le dénominateur est la dérivée du numérateur, nous sommes donc conduits à poser :

$$u = -\frac{w}{w'},$$

et à prévoir que l'équation en w sera linéaire, homogène du troisième ordre. Effectivement :

$$u' = -1 + \frac{ww''}{w'^2},$$

et :

$$u'' = \frac{ww'''}{w'^2} + \frac{w''}{w'} - \frac{2ww''^2}{w'^3};$$

(2) devient alors :

$$-\frac{w}{w'}\left(\frac{ww'''}{w'^2} + \frac{w''}{w'} - \frac{2ww''^2}{w'^3}\right) - 2\left(-1 + \frac{ww''}{w'^2}\right)^2 - 3\left(-1 + \frac{ww''}{w'^2}\right)$$
$$-\frac{R'}{R}\frac{w}{w'}\left(-1 + \frac{ww''}{w'^2}\right) - \frac{1}{R^2}\cdot\frac{w^2}{w'^2} - \frac{R'}{R}\cdot\frac{w}{w'} - 1 = 0,$$

ou, après simplification :

$$w''' + \frac{R'}{R}w'' + \frac{1}{R^2}w' = 0.$$

Posons :

$$w' = \theta,$$

et nous obtenons :

$$\theta'' + \frac{R'}{R}\theta' + \frac{1}{R^2}\theta = 0. \tag{3}$$

équation linéaire du deuxième ordre en θ. Faisons disparaître le deuxième terme par le changement de variable :

$$\sigma = \varphi(s),$$

d'où :

$$\theta' = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\sigma}\cdot\varphi',$$

et :

$$\theta'' = \frac{d\theta'}{ds} = \frac{d^2\theta}{d\sigma^2}\cdot\varphi'^2 + \frac{d\theta}{d\sigma}\varphi''.$$

L'équation (3) devient :

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}\varphi'^2 + \frac{d\theta}{d\sigma}\left(\varphi'' + \frac{R'}{R}\varphi'\right) + \frac{1}{R^2}\theta = 0$$

Choisissons la fonction φ de façon que :

$$\varphi'' + \frac{R'}{R}\varphi' = 0,$$

ou :

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{R'}{R}.$$

Il suffit de prendre :

$$\varphi' = \frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds},$$

d'où :

$$ds = R d\sigma.$$

Nous obtenons alors l'équation :

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \theta = 0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$\theta = A\cos\sigma + B\sin\sigma = \frac{du}{ds};$$

d'où :

$$w = A\int\cos\sigma.ds + B\int\sin\sigma.ds + C,$$

et enfin :

$$u = -\frac{A\int\cos\sigma.ds + B\int\sin\sigma.ds + C}{A\cos\sigma + B\sin\sigma}$$

avec :

$$\sigma = \int \frac{ds}{R}.$$

On peut se dispenser d'introduire l'arc s explicitement, car il ne figure dans ces formules que par sa différentielle. Donc les lignes géodésiques d'une surface développable s'obtiennent par trois quadratures au plus. On constate de plus que les deux méthodes conduisent aux mêmes calculs.

Surfaces réglées gauches. Trajectoires orthogonales des génératrices

6. — Soit la surface :

$$x = f(v) + u.l_0(v), \quad y = g(v) + u.m_0(v), \quad z = h(v) + u.n_0(v);$$

les génératrices étant des géodésiques, il en résulte que *les trajectoires orthogonales des génératrices déterminent sur ces génératrices des segments égaux.* Nous avons déjà vu comment on obtient ces trajectoires orthogonales : il faut déterminer u en fonction de v de façon que :

$$\Sigma l_0 dx = 0.$$

Pour simplifier, nous supposons que l_0, m_0, n_0 soient cosinus directeurs ; alors :

$$\Sigma l_0^2 = 1, \qquad \Sigma l_0 dl_0 = 0\,;$$

et l'équation différentielle devient :

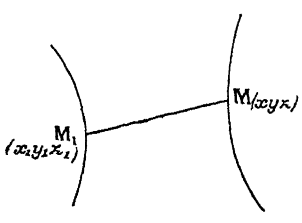
$$\Sigma l_0.df + du = 0,$$

d'où :

$$u = -\int \Sigma.l_0 df.$$

La détermination des trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée se ramène à une quadrature.

Remarque. — On peut rattacher ce fait à la formule qui donne la variation d'un segment de droite.



Prenons sur la droite MM_1 une direction positive ; soit r la distance MM_1 prise en valeur absolue. Soient x, y, z, et x_1, y_1, z_1, les coordonnées des deux extrémités, qui décrivent deux courbes données. La distance MM_1 est donnée par la formule :

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

d'où :

$$rdr = (x_1 - x)(dx_1 - dx) + (y_1 - y)(dy_1 - dy) + (z_1 - z)(dz_1 - dz).$$

ou :

$$dr = \left(\frac{x_1 - x}{r} dx_1 + \frac{y_1 - y}{r} dy_1 + \frac{z_1 - z}{r} dz_1\right) -$$
$$- \left(\frac{x_1 - x}{r} dx + \frac{y_1 - y}{r} dy + \frac{z_1 - z}{r} dz\right).$$

Soient α, β, γ ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, les cosinus directeurs des tangentes aux courbes en M, M_1 dirigées dans le sens des arcs croissants. Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la direction positive de la droite MM_1. La formule précédente s'écrit :

$$dr = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1)ds_1 - (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)ds\,;$$

et, si on introduit les angles θ, θ_1 de MM_1 avec les deux tangentes, on obtient la formule importante :

$$dr = \cos\theta_1\, ds_1 . - \cos\theta\, ds.$$

Supposons la droite MM_1 tangente à la première courbe et normale à la deuxième :

$$\theta = 0, \qquad \theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}\,;$$

et la formule se réduit à :

$$dr = - ds.$$

Nous retrouvons ainsi les propriétés des développantes et des développées.

Supposons la droite normale aux deux courbes, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, alors $dr = 0$, $r = c^{te}$, et nous retrouvons les propriétés des trajectoires orthogonales des génératrices.

Cône directeur. Point central. Ligne de striction

7. — On appelle *cône directeur* de la surface le cône :

$$x = u.l_0(v), \qquad y = u.m_0(v), \qquad z = u.n_0(v).$$

Si ce cône se réduit à un plan, ce plan s'appelle *plan directeur*, et les génératrices sont toutes parallèles à ce plan.

Le plan tangent en un point quelconque de la surface a pour coefficients les déterminants déduits du tableau :

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ df + udl_0 & dg + udm_0 & dh + udn_0 \end{matrix} \right\|.$$

Le plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondant à celle qui passe par le point considéré a pour coefficients les déterminants déduits du tableau :

$$\left\| \begin{matrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ dl_0 & dm_0 & dn_0 \end{matrix} \right\|.$$

Ces plans sont parallèles si u est infini. On a alors sur la surface le plan tangent au point à l'infini sur la génératrice, qu'on appelle *plan asymptote. Les plans asymptotes sont parallèles aux plans tangents au cône directeur le long des génératrices correspondantes.*

Dans une surface à plan directeur, tous les plans asymptotes sont parallèles au plan directeur.

Pour que les deux plans tangents à la surface et au cône directeur soient rectangulaires, il faut que la somme des produits des déterminants précédents soit nulle, ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} \Sigma l_0^2 & \Sigma l_0 df + u\Sigma l_0 dl_0 \\ \Sigma l_0 dl_0 & \Sigma dl_0 . df + u\Sigma dl_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du premier degré en u. *Il existe donc en général sur toute génératrice un point où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent au cône directeur, c'est-à-dire au plan asymptote. C'est le point central*, le plan tangent en ce point s'appelle *plan central.*

Le lieu des points centraux s'appelle *ligne de striction.*

Nous supposerons pour simplifier $\Sigma l_0^2 = 1$, ce qui écarte le cas des surfaces réglées à génératrices isotropes. Alors $\Sigma l_0 dl_0 = 0$ et l'équation en u qui donne le point central se réduit à :

$$u\Sigma dl_0^2 + \Sigma dl_0 . df = 0 ;$$

le point central existe donc toujours, sauf si :

$$\Sigma dl_0^2 = 0.$$

Dans ce cas la courbe sphérique base du cône directeur est une courbe minima de la sphère, c'est-à-dire une génératrice isotrope. Le cône est alors un plan tangent au cône asymptote de la sphère, qui est un cône isotrope, c'est un plan isotrope. Les surfaces considérées sont des

surfaces réglées à plan directeur isotrope. Toutes sont imaginaires, sauf le paraboloïde de révolution.

Remarque. — Le plan tangent est indéterminé si tous les déterminants du tableau (1) sont nuls. Alors il existe un facteur K tel que :

$$df + u\,dl_0 + Kl_0 = 0, \quad dg + u\,dm_0 + Km_0 = 0, \quad dh + u\,dn_0 + Kn_0 = 0\,;$$

ce qui exige que :

$$\begin{vmatrix} df & dl_0 & l_0 \\ dg & dm_0 & m_0 \\ dh & dn_0 & n_0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

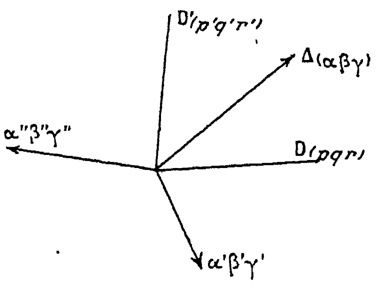
Cette condition, qui exprime que la génératrice considérée rencontre la génératrice infiniment voisine, peut avoir lieu pour des génératrices exceptionnelles. Si elle est une identité, la surface est développable. Pour trouver, dans ce cas, le point où le plan tangent est indéterminé, multiplions par dl_0, dm_0, dn_0, et ajoutons ; nous obtenons :

$$u\Sigma dl_0^2 + \Sigma dl_0.df = 0\,;$$

c'est l'équation qui détermine le point de contact de la génératrice et de l'arête de rebroussement page (85). L'indétermination du plan tangent en ce point explique que la formule précédente, qui donne la ligne de striction pour une surface réglée quelconque, donne l'arête de rebroussement pour une surface développable. C'est en effet le seul point de la génératrice d'une surface développable où le plan tangent ne soit pas confondu avec le plan asymptote ; et où on puisse, à cause de l'indétermination du plan tangent, considérer le plan perpendiculaire au plan asymptote comme tangent à la surface.

Variations du plan tangent le long d'une génératrice

8. — Proposons-nous de chercher l'angle des plans tangents à une surface réglée en deux points d'une même génératrice. A cet effet, traitons d'abord le problème suivant : on donne une droite Δ, de cosinus directeurs α, β, γ, et les coefficients de direction de deux droites qui la rencontrent, D (p, q, r) et D$'(p', q', r')$, calculer l'angle V des deux plans DΔ et D$'\Delta$.



Considérons un trièdre trirectangle auxiliaire direct dont l'un des axes soit Δ; soient α', β', γ';

$\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs des autres axes, et soient, dans ce système, u, v, w et u', v', w' les coefficients de direction de Δ et Δ'. Alors :

$$\operatorname{tg} V = \frac{vw' - wv'}{vv' + ww'}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} u &= \alpha p + \beta q + \gamma r, & v &= \alpha' p + \beta' q + \gamma' r, & w &= \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r \\ u' &= \alpha p' + \beta q' + \gamma r', & v' &= \alpha' p' + \beta' q' + \gamma' r', & w' &= \alpha'' p' + \beta'' q' + \gamma'' r', \end{aligned}$$

d'où :

$$vw' - wv' = \begin{vmatrix} \alpha' p + \beta' q + \gamma' r & \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r \\ \alpha' p' + \beta' q' + \gamma' r' & \alpha'' p' + \beta'' q' + \gamma'' r' \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} \alpha'\beta'\gamma' \\ \cdot \\ \alpha''\beta''\gamma'' \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p\,q\,r \\ \\ p'q'r' \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$$

D'ailleurs :

$$uu' + vv' + ww' = pp' + qq' + rr',$$

d'où :

$$vv' + ww' = \Sigma pp' - \Sigma\alpha p . \Sigma\alpha p'.$$

Alors :

$$\operatorname{tg} V = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\Sigma pp' - \Sigma\alpha p . \Sigma\alpha p'} = \frac{\sqrt{\Sigma\alpha^2} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\Sigma\alpha^2 . \Sigma pp' - \Sigma\alpha p . \Sigma\alpha p'}, \text{ puisque } \Sigma\alpha^2 = 1.$$

Sous cette forme, on peut alors introduire les coefficients directeurs l, m, n de la direction Δ.

$$(1) \qquad \operatorname{tg} V = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \begin{vmatrix} l & m & n \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\Sigma l^2 . \Sigma pp' - \Sigma lp . \Sigma lp'}.$$

Appliquons cette formule à l'angle des plans tangents en deux points M, M' d'une même génératrice. Nous prendrons pour directions D, D' les directions tangentes aux courbes $u = c^{te}$:

$$\begin{aligned} p &= df + u\,dl_0, & q &= dg + u\,dm_0, & r &= dh + u\,dn_0\,; \\ p' &= df + u'dl_0, & q' &= dg + u'dm_0, & r' &= dh + u'dn_0\,; \end{aligned}$$

le déterminant de la formule (1) devient :

$$\begin{vmatrix} l_0 & df + u\,dl_0 & df + u'dl_0 \\ m_0 & dg + u\,dm_0 & dg + u'dm_0 \\ n_0 & dh + u\,dn_0 & dh + u'dn_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_0 & dl_0 & df \\ m_0 & dm_0 & dg \\ n_0 & dn_0 & dh \end{vmatrix} (u - u')\,;$$

et :

$$\operatorname{tg} V = \frac{(u'-u)\sqrt{l_0^2+m_0^2+n_0^2}\begin{vmatrix} df & dg & dh \\ dl_0 & dm_0 & dn_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma l_0^2 & \Sigma l_0(df+udl_0) \\ \Sigma l_0(df+u'dl_0) & \Sigma(df+udl_0)(df+u'dl_0) \end{vmatrix}}.$$

Nous poserons :

$$D = \begin{vmatrix} df & dg & dh \\ dl_0 & dm_0 & dn_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \end{vmatrix},$$

et pour simplifier le résultat, nous prendrons pour l_0, m_0, n_0 les cosinus directeurs de la génératrice ; alors $\Sigma l_0^2 = 1$, $\Sigma l_0 dl_0 = 0$; nous supposerons, de plus, que la courbe $x = f(v)$, $y = g(v)$, $z = h(v)$ soit trajectoire orthogonale des génératrices, d'où $\Sigma l_0 df = 0$. Enfin nous déterminerons u par la relation :

$$u\Sigma dl_0^2 + \Sigma dl_0.df = 0$$

ce qui revient à prendre pour l'un des points le point central.

Le dénominateur devient ainsi :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Sigma df^2 + u\Sigma dl_0 df + u'\left[u\Sigma dl_0^2 + \Sigma dl_0 df\right] \end{vmatrix},$$

ce qui se réduit à :

$$\Sigma df^2 + u\Sigma dl_0 df = \frac{\Sigma df^2.\Sigma dl_0^2 - (\Sigma dl_0.df)^2}{\Sigma dl_0^2};$$

et alors :

$$\operatorname{tg} V = \frac{(u'-u)D.\Sigma dl_0^2}{\Sigma df^2.\Sigma dl_0^2 - (\Sigma dl_0.df)^2}.$$

En posant :

$$K = \frac{\Sigma dl_0^2.\Sigma df^2 - (\Sigma dl_0.df)^2}{D.\Sigma dl_0^2};$$

et en remarquant que $u' - u = CM$, on obtient donc la *formule de Chasles* :

$$\operatorname{tg} V = \frac{CM}{K}, \tag{2}$$

d'où les conséquences bien connues suivantes, et qui ne sont en défaut que pour des génératrices singulières :

1° *Lorsque* M *décrit la génératrice d'un bout à l'autre, le plan tangent* (P) *en* M *tourne autour de la génératrice toujours dans le même sens, et la rotation totale qu'il effectue est de 180°.* En deux points différents, les plans tangents sont différents.

2° *La division des points* M *et le faisceau des plans* (P) *sont en correspondance homographique.*

3° Comme trois couples définissent une homographie, *deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune, et qui sont tangentes en trois points de cette génératrice, sont tangentes en tous les autres points de cette génératrice*, c'est-à-dire se raccordent tout le long de cette génératrice.

Cherchons à simplifier l'expression de K. Pour cela, remarquons que :

$$D^2 = \begin{vmatrix} \Sigma df^2 & \Sigma dl_0.df_0 & \Sigma l_0.df \\ \Sigma dl_0.df & \Sigma dl_0^2 & \Sigma l_0 dl_0 \\ \Sigma l_0.df & \Sigma l_0 dl_0 & \Sigma l_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma df^2 & \Sigma dl_0.df & 0 \\ \Sigma dl_0.df & \Sigma dl_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Sigma dl_0^2 \Sigma df^2 - (\Sigma dl_0.df)^2.$$

d'où :

$$K = \frac{D}{\Sigma dl_0^2}. \tag{3}$$

Dans le cas général, on trouve de même :

$$K = \frac{D.\Sigma l_0^2}{\Sigma l_0^2.\Sigma dl_0^2 - (\Sigma l_0 dl_0)^2}. \tag{4}$$

K est le *paramètre de distribution ;* il est rationnel. La formule (2) montre que, si M se déplace dans une direction quelconque sur la génératrice, le plan tangent tourne, par rapport à cette direction, dans le sens positif de rotation, si K est positif ; et tourne dans le sens négatif, si K est négatif.

Le signe de K correspond donc à une propriété géométrique de la surface. D'après (3) ou (4), *le paramètre de distribution est nul pour une surface développable.*

Abstraction faite du signe, la formule (3) met en évidence que *le paramètre de distribution est le quotient de la plus courte distance de la génératrice considérée et de la génératrice infiniment voisine par l'angle de ces deux génératrices.* Car cette distance est $D : \sqrt{\Sigma dl_0^2}$, et cet angle est $\sqrt{\Sigma dl_0^2}$, aux infiniments petits près d'ordre supérieur.

Remarque. — Soient, sur une même génératrice, deux points M, M' où les plans tangents soient rectangulaires. Les angles V, V' sont tels que :

$$\operatorname{tg} V . \operatorname{tg} V' = -1,$$

d'où, en vertu de (2) :

$$CM.CM' = -K^2;$$

les points d'une génératrice où les plans tangents sont rectangulaires forment une involution dont C est le point central.

Exemple 1. — Surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche.

Soit la courbe :

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s);$$

avec les notations habituelles, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{lll} df = \alpha ds, & dg = \beta ds, & dh = \gamma ds, \\ l_0 = \alpha'', & m_0 = \beta'', & n_0 = \gamma'', \\ dl_0 = \dfrac{\alpha'}{T} ds, & dm_0 = \dfrac{\beta'}{T} ds, & dn_0 = \dfrac{\gamma'}{T} ds. \end{array}\right.$$

Le point central est ici défini par $u = 0$; *la courbe est ligne de striction de la surface engendrée par ses binormales.* Le paramètre de distribution est :

$$K = \begin{vmatrix} \alpha ds & \beta ds & \gamma ds \\ \dfrac{\alpha'}{T} ds & \dfrac{\beta'}{T} ds & \dfrac{\gamma'}{T} ds \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \frac{T^2}{ds^2} = T ;$$

le paramètre de distribution est égal au rayon de torsion de la courbe au point correspondant. La courbe est ligne de striction, trajectoire orthogonale des génératrices et géodésique.

Exemple 2. — Surface engendrée par les normales principales à une courbe.

On a ici :

$$\begin{array}{lll} df = \alpha ds, & dg = \beta ds, & dh = \gamma ds, \\ l_0 = \alpha', & m_0 = \beta', & n_0 = \gamma', \\ dl_0 = \left(-\dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{\alpha''}{T}\right) ds, & dm_0 = \left(-\dfrac{\beta}{R} - \dfrac{\beta''}{T}\right) ds, & dn_0 = \left(-\dfrac{\gamma}{R} - \dfrac{\gamma''}{T}\right) ds ; \end{array}$$

le point central C est défini par l'équation :

$$u = \frac{\Sigma\alpha\left(\dfrac{\alpha}{R} + \dfrac{\alpha''}{T}\right)}{\Sigma\left(\dfrac{\alpha}{R} + \dfrac{\alpha''}{T}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{T^2}} = \frac{RT^2}{R^2 + T^2} = \mathrm{MC}.$$

Le paramètre de distribution est :

$$K = -\frac{R^2T^2}{R^2 + T^2} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\alpha}{R} + \dfrac{\alpha''}{T} & \dfrac{\beta}{R} + \dfrac{\beta''}{T} & \dfrac{\gamma}{R} + \dfrac{\gamma''}{T} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = \frac{R^2T}{R^2 + T^2}.$$

Cherchons le plan tangent au centre de courbure O. La formule de Chasles donne :

$$\operatorname{tg} V = \frac{CO}{K} = \frac{MO - MC}{K} = \frac{1}{K}\left(R - \frac{RT^2}{R^2 + T^2}\right) = \frac{1}{K} \cdot \frac{R^3}{R^2 + T^2} = \frac{R}{T} ;$$

pour le point M, qui est sur la courbe, on obtient de même :

$$\operatorname{tg} V = \frac{CM}{K} = -\frac{T}{R},$$

donc :

$$\operatorname{tg} V . \operatorname{tg} V' = -1.$$

Les plans tangents en M *et* O *sont rectangulaires*, ce qui est un cas particulier d'une proposition que nous verrons plus loin (§ 12).

Elément linéaire

9. — Cherchons l'élément linéaire d'une surface réglée définie par les équations :

$$x = f(v) + ul_0(v), \qquad y = g(v) + um_0(v) \qquad z = h(v) + un_0(v).$$

Nous en tirons, en notant par des accents les dérivées par rapport à v :

$$\left\{ \begin{array}{c} dx = (f' + ul'_0)dv + l_0du, \quad dy = (g' + um'_0)dv + m_0du, \\ dz = (h' + un'_0)dv + n_0du \end{array} \right.$$

et :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

avec :

$$E = \Sigma l_0^2, \quad F = u\Sigma l_0 l'_0 + \Sigma l_0 f', \quad G = u^2 \Sigma l'^2_0 + 2u\Sigma l'_0 f' + \Sigma f'^2.$$

Supposons que $l_0 m_0 n_0$ soient les cosinus directeurs, alors :

$$\Sigma l_0^2 = 1, \qquad \Sigma l_0 l'_0 = 0,$$

d'où :

$$E = 1, \qquad F = \Sigma l_0 f', \qquad G = u^2 \Sigma l'^2_0 + 2u\Sigma l'_0 f' + \Sigma f'^2.$$

Ces résultats s'obtiennent directement en faisant le changement de paramètre :

$$\sqrt{E} . u \doteq u_1 ;$$

d'où :

$$du_1 = \sqrt{E}\, du + u \frac{\frac{dE}{dv}}{2\sqrt{E}}\, dv.$$

Nous obtenons bien, en supprimant les indices, une expression de la forme :

$$ds^2 = du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2.$$

Supposons de plus que la courbe :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v)$$

soit trajectoire orthogonale des génératrices, alors :

$$\Sigma l_0 f' = 0, \qquad \mathrm{F} = 0,$$

et l'élément linéaire se réduit à :

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2\,;$$

on devait prévoir qu'il serait de cette forme, car les courbes coordonnées sont orthogonales. On arrive aussi à cette expression en posant :

$$du + \mathrm{F}dv = du_1,$$

d'où :

$$u_1 = u + \int \mathrm{F}dv$$

ce qui exige une quadrature.

La variable u est définie à une constante près, c'est une longueur portée sur chaque génératrice à partir de la même trajectoire orthogonale. Pour préciser la variable v, considérons la direction de la génératrice :

$$x = l_0(v), \qquad y = m_0(v), \qquad z = n_0(v).$$

Ces équations sont celles de la trace du cône directeur sur la sphère de rayon 1 ; nous prendrons pour v l'arc de cette courbe ; alors :

$$\Sigma l'^2_0 = 1,$$

et :

$$\mathrm{G} = u^2 + 2u\Sigma l'_0 f' + \Sigma f'^2.$$

Posons :

$$\Sigma l'_0 f' = \mathrm{G}_0, \qquad \Sigma f'^2 = \mathrm{G}_1,$$

de sorte que :

$$\mathrm{G} = u^2 + 2u\mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1.$$

Les quantités $\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_1$ ainsi introduites sont liées d'une façon simple au point central et au paramètre de distribution. Considérons, en effet, l'involution des points M, M' où les plans tangents sont rectangulaires ; son point central est le point central de la génératrice, et en désignant par K le paramètre de distribution :

$$\mathrm{CM.CM'} = -\mathrm{K}^2.$$

Le plan tangent en un point u de la génératrice a pour coefficients les déterminants déduits du tableau :

$$\left\| \begin{matrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ f' + ul'_0 & g' + um'_0 & h' + un'_0 \end{matrix} \right\| ;$$

de même le plan tangent au point u' aura pour coefficients les déterminants déduits du tableau :

$$\left\| \begin{matrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ f' + u'l'_0 & g' + u'm'_0 & h' + u'n'_0 \end{matrix} \right\| .$$

Exprimons que ces plans tangents sont rectangulaires. La somme des produits des déterminants précédents, et par suite le produit des tableaux, doit être nul, ce qui donne :

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & G_1 + (u + u')G_0 + uu' \end{matrix} \right| = 0 ;$$

la relation d'involution est donc :

$$uu' + (u + u')G_0 + G_1 = 0,$$

ou :

$$(u + G_0)(u' + G_0) = G_0^2 - G_1.$$

Le point central, étant l'homologue du point à l'infini, est donné par

$$u + G_0 = 0 ;$$

donc $-G_0$ est l'u du point central. Désignons-le par :

$$P = -G_0 = -\Sigma l'_0 f'.$$

D'autre part :

$$G_0^2 - G_1 = -K^2,$$

d'où :

$$G_1 = G_0^2 + K^2 = P^2 + K^2 = \Sigma f'^2.$$

Donc :

$$G = u^2 - 2uP + P^2 + K^2 = (u - P)^2 + K^2.$$

En résumé, *si v est l'arc de la trace du cône directeur sur la sphère de rayon 1, u la longueur portée sur la génératrice à partir d'une trajectoire orthogonale, l'élément linéaire est donné par la formule :*

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + [(u - P)^2 + K^2]dv^2$$

P *étant l'u du point central et* K *le paramètre de distribution.*

Remarque. — Ceci peut servir à calculer le paramètre de distribution. En effet :

$$\begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ l'_0 & m'_0 & n'_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} G_1 & G_0 & 0 \\ G_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = G_1 - G_0^2 = K^2,$$

d'où :

$$(2) \qquad K = \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ l'_0 & m'_0 & n'_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \end{vmatrix}, \quad P = -\Sigma l'_0 f', \quad P^2 + K^2 = \Sigma f'^2.$$

Réciproquement, soit une surface dont l'élément linéaire est de la forme :

$$ds^2 = du^2 + [(u - P)^2 + K^2]dv^2 ;$$

cherchons s'il y a des surfaces réglées applicables sur cette surface ; les éléments d'une telle surface réglée seront déterminés par les relations :

$$\Sigma l_0^2 = 1, \quad \Sigma l_0 f' = 0, \quad \Sigma l'^2_0 = 1, \quad \Sigma l'_0 f' = -P, \quad \Sigma f'^2 = K^2 + P^2 ;$$

la dernière de ces relations s'écrit encore, d'après l'expression (2) de K,

$$\Sigma f'(m_0 n'_0 - n_0 m'_0) = -K.$$

Nous pouvons d'abord nous donner arbitrairement le cône directeur de façon à satisfaire aux deux équations $\Sigma l_0^2 = 1$, $\Sigma l'^2_0 = 1$. Il reste alors à satisfaire à trois équations linéaires en f', g', h' dont le déterminant n'est pas nul ; f', g', h' seront parfaitement déterminés, f, g, h le seront à une constante additive près, ce qui revient à ajouter à x, y, z des quantités constantes, c'est-à-dire à faire subir à la surface une translation. *Il y a donc une infinité de surfaces réglées applicables sur une surface réglée donnée, de manière que les génératrices correspondent aux génératrices*, puisqu'on peut prendre arbitrairement le cône directeur. Remarquons que dans l'élément linéaire figure, non pas K, mais K^2, de sorte qu'en particulier *il existe deux surfaces réglées ayant même cône directeur, des paramètres de distribution égaux et de signes contraires et applicables l'une sur l'autre.*

Pour avoir explicitement f, g, h, résolvons le système des équations linéaires :

$$\Sigma l_0 f' = 0, \qquad \Sigma l'_0 f' = -P, \qquad \Sigma(m_0 n'_0 - n_0 m'_0) f' = -K ;$$

l_0, m_0, n_0 ; l'_0, m'_0, n'_0 sont ici cosinus directeurs de deux directions rec-

tangulaires. Introduisons une nouvelle direction de cosinus l_2, m_2, n_2 formant avec les deux précédentes un trièdre trirectangle direct :

$$l_2 = m_0 n'_0 - n_0 m'_0, \qquad m_2 = n_0 l'_0 - l_0 n'_0, \qquad n_2 = l_0 m'_0 - m_0 l'_0.$$

Le système devient :

$$\Sigma l_0 f' = 0, \qquad \Sigma l'_0 f' = -P, \qquad \Sigma l_2 f' = -K\,;$$

d'où :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f' = -Pl'_0 - K(m_0 n'_0 - n_0 m'_0), \\ g' = -Pm'_0 - K(n_0 l'_0 - l_0 n'_0), \\ h' = -Pn'_0 - K(l_0 m'_0 - m_0 l'_0). \end{array} \right.$$

On en déduit f, g, h par des quadratures.

La forme Ψ et les lignes asymptotiques

10. — Nous pouvons prendre pour seconde forme fondamentale (page 27) :

$$\Psi(du,dv) = \Sigma A d^2x = \begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (f'' + ul''_0)dv^2 + 2l'_0 du dv & . & . \\ l_0 & . & . \\ f' + ul'_0 & . & . \end{vmatrix}$$

d'où pour Ψ une expression de la forme :

$$\Psi(du, dv) = 2F' du dv + G' dv^2,$$

F' étant fonction de v, et G' un trinôme du deuxième degré en u. Nous trouvons naturellement pour lignes asymptotiques les courbes $dv = 0$ ou $v = c^{te}$, qui sont les génératrices. Les autres lignes asymptotiques sont déterminées par l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dv} = -\frac{G'}{2F'},$$

qui est de la forme :

$$(1) \qquad \frac{du}{dv} = Ru^2 + 2Su + T,$$

R, S, T étant fonctions de v. C'est une *équation de Riccati*. Rappelons les propriétés de ces équations.

Equation de Riccati

1° *Supposons qu'on connaisse une intégrale* u_1, de cette équation. Posons :

(2) $$u = u_1 + \frac{1}{w},$$

d'où :

$$du = du_1 - \frac{dw}{w^2}.$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{du_1}{dv} - \frac{1}{w^2}\cdot\frac{dw}{dv} = Ru_1^2 + 2R\frac{u_1}{w} + R\frac{1}{w^2} + 2Su_1 + 2S\frac{1}{w} + T;$$

mais u_1 étant intégrale de (1),

$$\frac{du_1}{dv} = Ru_1^2 + 2Su_1 + T,$$

de sorte que l'équation devient :

$$-\frac{dw}{dv} = 2(Ru_1 + S)w + R,$$

ce qui est de la forme :

(3) $$\frac{dw}{dv} = Qw - R.$$

C'est une équation linéaire dont *l'intégration s'effectue par deux quadratures.*

2° *Supposons qu'on connaisse deux intégrales u_1 u_2*, de l'équation. Posons :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{w_0},$$

d'où :

$$w_0 = \frac{1}{u_2 - u_1};$$

w_0 sera une intégrale de l'équation (3). Posons alors :

(4) $$w = w_0 + \theta,$$

d'où :

$$dw = dw_0 + d\theta;$$

(3) devient :

$$\frac{dw_0}{dv} + \frac{d\theta}{dv} = Qw_0 + Q\theta - R\,;$$

ou, comme w_0 est intégrale de (3) :

$$\frac{d\theta}{dv} = Q\theta, \tag{5}$$

équation linéaire sans deuxième membre qui s'intègre immédiatement *par une seule quadrature :*

$$\frac{d\theta}{\theta} = Qdv,$$

$$\log\theta = \int Qdv,$$

$$\theta = e^{\int Qdv}.$$

3° *Supposons qu'on connaisse trois intégrales* u_1, u_2, u_3 de l'équation (1). On connaît alors deux intégrales de l'équation (3). Soit :

$$w_1 = \frac{1}{u_3 - u_1}\,;$$

w_1 est intégrale de (3), et par suite on connaît une intégrale θ_0 de (5) :

$$\theta_0 = w_1 - w_0 = \frac{1}{u_3 - u_1} - \frac{1}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 - u_3}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}.$$

Posons :

$$\theta = \theta_0\psi,$$

$$d\theta = \theta_0.d\psi + \psi.d\theta_0\,;$$

(5) devient :

$$\theta_0\frac{d\psi}{dv} + \psi.\frac{d\theta_0}{dv} = Q\psi\theta_0,$$

ou, comme θ_0 est intégrale de (5) :

$$\theta_0\frac{d\psi}{dv} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dv} = 0.$$

ψ est une constante C, et l'intégrale générale de (5) est

$$\theta = C\theta_0. \tag{6}$$

L'équation s'intègre complètement par des opérations algébriques. Si nous cherchons l'expression de l'intégrale générale u en fonction

des intégrales particulières u_1, u_2, u_3, nous avons, en vertu de (2), (4), (6),

$$u = u_1 + \frac{1}{w} = u_1 + \frac{1}{\frac{1}{u_2 - u_1} + \theta} = u_1 + \frac{1}{\frac{1}{u_2 - u_1} + C\frac{u_2 - u_3}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}}$$

d'où :

$$\frac{1}{u - u_1} = \frac{1}{u_2 - u_1} + \frac{C(u_2 - u_3)}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)} = \frac{u_3 - u_1 + C(u_2 - u_3)}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)},$$

d'où :

$$C(u_2 - u_3) = \frac{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}{u - u_1} - (u_3 - u_1) = \frac{(u_3 - u_1)(u_2 - u)}{u - u_1},$$

$$C = \frac{u - u_2}{u - u_1} : \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1},$$

ou :

$$(u, u_1, u_2, u_3) = C. \tag{7}$$

Ainsi le rapport anharmonique de quatre intégrales quelconques d'une équation de Riccati est constant. En remarquant que, dans le cas présent, ces intégrales sont précisément les u des points d'intersection d'une génératrice quelconque avec les asymptotiques, on voit que *quatre lignes asymptotiques d'une surface réglée coupent les génératrices suivant un rapport anharmonique constant.*

Remarque. — L'équation (7) résolue par rapport à u donne :

$$u = \frac{VC + V_0}{V_1 C + V_2} \tag{8}$$

V, V_0, V_1, V_2 étant fonctions de v. La solution générale est donc, par rapport à la constante arbitraire, une fraction du premier degré. Inversement toute fonction de la forme (8) satisfait à une équation de Riccati, car si on élimine la constante C au moyen d'une différentiation, on retrouve une équation différentielle de la forme (1).

Cas particuliers

Si la surface réglée a une directrice rectiligne, cette directrice est une asymptotique, et on connaît une intégrale particulière de l'équation de Riccati (1). La détermination des lignes asymptotiques se fait au moyen de deux quadratures. C'est le cas des *surfaces réglées à plan directeur* (une directrice à l'infini).

Si la surface admet deux directrices rectilignes, ces deux droites sont des asymptotiques, et on connaît deux intégrales particulières de l'équation (1). C'est le cas des *surfaces conoïdes à plan directeur.*

Il ne faut plus alors, d'après ce qui précède, qu'une quadrature pour déterminer les lignes asymptotiques. Mais, en réalité, on peut les obtenir sans quadrature.

Considérons, en effet, une surface réglée admettant deux directrices rectilignes. On peut effectuer une transformation homographique de façon que l'une des directrices s'en aille à l'infini, la surface se transforme en un conoïde à plan directeur.

Soit :

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

l'équation d'un tel conoïde. Elle équivaut aux équations :

$$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = \varphi(v) ;$$

les coefficients l, m, n du plan tangent doivent satisfaire aux relations :

$$l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial u} + n\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad l\frac{\partial x}{\partial v} + m\frac{\partial y}{\partial v} + n\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

ou :

$$l + mv = 0, \qquad mu + n\varphi'(v) = 0 ;$$

équations satisfaites si l'on prend :

$$n = -u, \ m = \varphi'(v), \ l = -v\varphi'(v).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques :

$$\Psi(du,dv) = \Sigma l d^2x = -\Sigma dl dx = 0$$

est donc ici :

$$[\varphi'(v)dv + v\varphi''(v)dv]du - \varphi''(v)dv.(vdu + udv) + du.\varphi'(v).dv = 0,$$

ou :

$$u\varphi''(v).dv^2 - 2\varphi'(v)dudv = 0.$$

Nous trouvons la solution $v = c^{te}$, qui nous donne les génératrices, et il reste :

$$\frac{\varphi''(v)dv}{\varphi'(v)} = \frac{2du}{u},$$

d'où :

$$\operatorname{Log}\varphi'(v) = \operatorname{Log}u^2 - \operatorname{Log}C,$$

ou :

$$u^2 = C\varphi'(v)\,;$$

on obtient ainsi sans quadrature les lignes asymptotiques d'un conoïde.

Remarque. — S'il y a trois directrices rectilignes, la surface est une surface du second degré, et est doublement réglée. Les deux systèmes de lignes asymptotiques sont les deux systèmes de génératrices rectilignes, et on voit que *quatre génératrices d'un même système d'une quadrique rencontrent les génératrices de l'autre système suivant un rapport anharmonique constant.*

Calcul de la forme Ψ

Cherchons l'expression générale de la forme Ψ. Introduisons pour cela les variables canoniques u, v qui nous ont permis d'arriver à la forme type de l'élément linéaire. Considérons le trièdre de Serret de la courbe (Σ), trace du cône directeur sur la sphère de rayon 1 qui a son centre au sommet de ce cône. La génératrice (l_0, m_0, n_0) est dans le plan normal à cette courbe : soit θ son angle avec la normale principale ; avec les notations habituelles, nous avons :

$$\left\{\begin{aligned} l_0 &= \alpha' \cos\theta + \alpha'' \sin\theta, \\ m_0 &= \beta' \cos\theta + \beta'' \sin\theta, \\ n_0 &= \gamma' \cos\theta + \gamma'' \sin\theta; \end{aligned}\right.$$

d'où :

$$\alpha = l'_0 = \theta'(-\alpha' \sin\theta + \alpha'' \cos\theta) - \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right)\cos\theta + \frac{\alpha'}{T}\sin\theta.,$$

et les analogues ;
d'où :

$$\frac{\cos\theta}{R} = -1, \qquad \theta' = \frac{1}{T}.$$

Alors :

$$\left\{\begin{aligned} m_0 n'_0 - n_0 m'_0 = m_0\gamma - n_0\beta &= \alpha' \sin\theta - \alpha'' \cos\theta, \\ n_0 l'_0 - l_0 n'_0 &= \beta' \sin\theta - \beta'' \cos\theta, \\ l_0 m'_0 - m_0 l'_0 &= \gamma' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta; \end{aligned}\right.$$

et nous obtenons, au moyen des formules (3) du § 9 (page 110),

$$\left\{\begin{aligned} & f' + ul'_0 = (u-P)l'_0 - K(m_0 n'_0 - n_0 m'_0) = (u-P)\alpha - K\alpha' \sin\theta + K\alpha'' \cos\theta, \\ & g' + um'_0 = \ldots., \\ & h' + un'_0 = \ldots.; \end{aligned}\right.$$

puis, en prenant les dérivées par rapport à v.

$$f'' + ul''_0 = -P'\alpha + (u-P)\frac{\alpha'}{R} - K'\alpha' \sin\theta - K\frac{\alpha'}{T}\cos\theta +$$
$$+ K\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right)\sin\theta + K'\alpha''\cos\theta - K\frac{\alpha''}{T}\sin\theta + K\frac{\alpha'}{T}\cos\theta$$

ou :

$$\begin{cases} f'' + ul''_0 = \alpha\left(\dfrac{K\sin\theta}{R} - P'\right) + \alpha'\left(\dfrac{u-P}{R} - K'\sin\theta\right) + \alpha''.K'\cos\theta, \\ g'' + um''_0 = \dots. \\ h'' + un''_0 = \dots. \end{cases}$$

La formule du § 10 devient donc

$$\Psi = \begin{vmatrix} 2\alpha.dudv + \left[\alpha\left(\dfrac{K\sin\theta}{R} - P'\right) + \alpha'\left(\dfrac{u-P}{R} - K'\sin\theta\right) + \alpha''.K'\cos\theta\right]dv^2 & \dots \\ \alpha'\cos\theta + \alpha''\sin\theta & \dots \\ (u-P)\alpha - K\alpha'\sin\theta. + K\alpha''\cos\theta & \dots \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est le produit du déterminant des neuf cosinus par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2dudv + \left(\dfrac{K\sin\theta}{R} - P'\right)dv^2 & \left(\dfrac{u-P}{R} - K'\sin\theta\right)dv^2 & K'\cos\theta.\,dv^2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ u-P & -K\sin\theta & K\cos\theta \end{vmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\Psi = K\left[2dudv + \left(\frac{K\sin\theta}{R} - P'\right)dv^2\right]$$
$$+ (u-P)\left[(u-P)\frac{\sin\theta}{R} + - K'\right]dv^2,$$

ou enfin :

$$\Psi = 2Kdudv - \left\{(u-P)K' + KP' - \frac{\sin\theta}{R}\left[(u-P)^2 + K^2\right]\right\}dv^2.$$

Le seul élément nouveau qui intervienne est la courbure géodésique $\frac{\sin\theta}{R}$ de la courbe (Σ) sur la sphère. Cet élément suffit à déterminer (Σ) ; supposons en effet que l'on se donne :

$$\frac{\sin\theta}{R} = \varphi(v);$$

nous avons vu plus haut que :

$$\frac{\cos\theta}{R} = -1, \qquad \frac{1}{T} = \theta';$$

nous en déduisons les formules :

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \theta = -\varphi(v), \qquad R = -\cos\theta, \qquad T = \frac{dv}{d\theta};$$

qui donnent le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Σ) en fonction de son arc v. On sait que la forme d'une courbe gauche est ainsi entièrement définie.

Remarque. — Les formules (1) nous permettent de trouver la condition pour qu'une courbe soit tracée sur une sphère de rayon 1. On en tire en effet :

$$\frac{dR}{dv} = \sin\theta . \frac{d\theta}{dv} = \frac{\sin\theta}{T},$$

d'où, en remplaçant par s la lettre v, qui désigne l'arc de (Σ) :

$$(2) \qquad R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 1;$$

Ce qui donne la condition, évidente *a priori*, que le rayon de la sphère osculatrice doit être égal à 1.

Supposons, *réciproquement*, que cette condition soit réalisée. Nous pouvons poser :

$$R = -\cos\theta, \qquad T\frac{dR}{ds} = \sin\theta,$$

d'où nous tirons :

$$T = \frac{ds}{d\theta}.$$

La comparaison de ces équations avec les formules (1) et (2) du § 2 nous montre que l'une des développées de la courbe est (en faisant, dans les formules de ce § 2, $\chi = \theta$, $u = -1$) :

$$x = f - \alpha'\cos\theta - \alpha''\sin\theta, \qquad y = g - \beta'\cos\theta - \beta''\sin\theta,$$
$$z = h - \gamma'\cos\theta - \gamma''\sin\theta.$$

On en tire :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha + \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right)\cos\theta - \frac{\alpha'}{T}\sin\theta + \left(\alpha'\sin\theta - \alpha''\cos\theta\right).\frac{1}{T} = 0;$$

et, de même, $dy = dz = 0$; de sorte que cette développée est réduite à un point, qu'on peut supposer être l'origine des coordonnées.

Le plan normal à la courbe passant constamment à l'origine, on a, dès lors, l'identité :

$$f.df + g.dg + h.dh = 0.$$

Donc

$$f^2 + g^2 + h^2 = \text{const.}$$

La courbe est donc bien une courbe sphérique, et le rayon de la sphère sur laquelle elle est tracée est égal à l'unité, puisque tel est le rayon de ses sphères osculatrices.

Lignes de courbure

11. — L'équation différentielle des lignes de courbure est [Ch. III § 7].

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial ds^2}{\partial du} & \dfrac{\partial ds^2}{\partial dv} \\ \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial du} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial dv} \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$\begin{vmatrix} du & [(u-P)^2 + K^2]dv \\ Kdv & Kdu - \left\{ (u-P)K' + KP' - \dfrac{\sin\theta}{R}\left[(u-P)^2 + K^2\right] \right\} dv \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$Kdu^2 - \left\{ (u-P)K' + KP' - \varphi(v)\,[(u-P)^2 + K^2] \right\} dudv - \\ - K\,[(u-P)^2 + K^2]\,dv^2 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des lignes de courbure, où $\varphi(v)$ représente la courbure géodésique de la courbe (Σ).

Centre de courbure géodésique

12. — Considérons une trajectoire orthogonale des génératrices, par exemple $u = 0$:

$$x = f(v), \quad y = g(v), \quad z = h(v);$$

cherchons son centre de courbure géodésique. C'est le point où la droite polaire rencontre le plan tangent. Or la génératrice, étant normale à sa trajectoire orthogonale, est l'intersection du plan normal et du plan tangent; *le centre de courbure géodésique est donc à l'intersection de la droite polaire avec la génératrice.* Le plan normal a pour équation :

$$\Sigma(x-f)f' = 0\,;$$

la caractéristique est définie par l'équation précédente et par :

$$\Sigma(x-f)f'' - \Sigma f'^2 = 0.$$

Pour déterminer le centre de courbure géodésique, il suffit de déterminer l'u du point d'intersection de la droite précédente avec la génératrice :

$$x = f(v) + ul_0(v), \qquad y = g(v) + um_0(v), \qquad z = h(v) + un_0(v).$$

La première équation se réduit à une identité, la deuxième donne :

$$u\Sigma l_0 f'' - \Sigma f'^2 = 0\,;$$

mais :

$$\Sigma l_0 f' = 0,$$

d'où :

$$\Sigma l'_0 f' + \Sigma l_0 f'' = 0\,;$$

et l'équation qui donne l'u du point cherché devient :

$$u\Sigma l'_0 f' + \Sigma f'^2 = 0,$$

ou [Equ (2) § 9] :

$$-uP + P^2 + K^2 = 0\,;$$

ce qui s'écrit :

$$P(u-P) = K^2.$$

Si C est le point central, M le point considéré sur la trajectoire orthogonale, M′ le centre de courbure géodésique, l'équation précédente donne :

$$CM.CM' = -K^2.$$

Donc les plans tangents en M et M′ sont rectangulaires (cf. p. 104). Ainsi le *centre de courbure géodésique en un point* M *d'une trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée est le point de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent en* M.

Application. — Si nous considérons maintenant (voir les figures pages 28, 35, 53) une courbe (C) tracée sur une surface quelconque (S), les normales MN′ à (C) tangentes à (S) engendrent une surface réglée (Σ_t) ; les surfaces (S), (Σ_t) étant tangentes tout le long de (C), la courbe (C) a en M même centre de courbure géodésique G sur (S) et sur (Σ_t) ; donc G est l'homologue de M dans l'involution des plans tangents rectangulaires relative à la génératrice MN′ de (Σ_t) : *le centre de courbure géodésique* G *est le point de* MN′ *où le plan normal à* (C) *est tangent à* (Σ_t).

De même, le centre de courbure normale K, étant sur la droite polaire de (C), est centre de courbure géodésique en M sur la surface réglée (Σ_n) engendrée par les normales MN, menées à (S) aux divers points de (C) ; il est donc homologue à M dans l'involution des plans tangents rectangulaires relative à la génératrice MN de (Σ_n) : *le centre de courbure normale* K *est le point de* MN *où le plan normal à* (C) *est tangent à* (Σ_n).

Pour la même raison, le centre de courbure C possède la même propriété, relativement à la surface réglée engendrée par les normales principales de (C) [Cf. page 106].

Remarque. — Les résultats de ce paragraphe deviennent évidents si on remarque que toute normale à une courbe (C) en un point M de cette courbe touche la surface polaire au point où elle rencontre la droite polaire qui correspond à M ; de sorte que toute surface réglée engendrée par des normales à (C) est circonscrite à la surface polaire, c'est-à-dire tangente à chaque plan normal, le point de contact avec un quelconque de ces plans normaux étant sur la droite polaire correspondante.

CHAPITRE VI

CONGRUENCES DE DROITES

Points et plans focaux

1. — On appelle *congruence*, ou *système de rayons*, un ensemble de droites dépendant de deux paramètres ; toutes les droites rencontrant deux droites fixes constituent une congruence ; de même les droites passant par un point fixe, les normales à une surface : si, sur une surface, on considère une famille de courbes dépendant d'un paramètre, l'ensemble de leurs tangentes constitue encore une congruence.

Les propriétés fondamentales des congruentes formées des normales à une même surface, qui jouent en optique géométrique un rôle essentiel, sont dues à Monge. Les principales notions de la théorie générale des congruences ont été introduites par Hamilton.

Une droite quelconque (D) d'une congruence donnée sera représentée par les équations :

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(v, w) + u.a(v, w), \qquad y = g(v, w) + u.b(v, w), \\ \qquad\qquad z = h(v, w) + u.c(v, w). \end{cases}$$

Les équations :

$$(2) \qquad x = f(v, w), \qquad y = g(v, w), \qquad z = h(v, w)$$

définissent ce que nous appellerons, pour faciliter le langage, le *support* de la congruence ; a, b, c définissent les directions des *droites de la congruence*, ou *rayons de la congruence* passant par chaque point du support. Ce support sera en général une surface, et la congruence sera constituée par des droites de directions données passant par tous les points d'une surface. Il peut arriver que f, g, h ne dépendent que d'un seul paramètre, le support est alors une courbe, et par tout point de la courbe passent une infinité de droites de la congruence, qui constituent un cône. Enfin f, g, h peuvent se réduire à des constantes, et la

congruence est constituée par toutes les droites passant par le point fixe de coordonnées f, g, h.

Supposons qu'on établisse une relation entre v, w; cela revient à choisir ∞^1 droites de la congruence, qui constituent une *surface réglée de la congruence*. Les équations (1) deviennent ainsi les équations d'une surface réglée. Considérons toutes les surfaces réglées de la congruence passant par une droite (D) de la congruence. Deux de ces surfaces se raccordent en deux points de la droite (D). Nous allons montrer que ces deux points sont indépendants des surfaces réglées que l'on considère. En d'autres termes, *sur chaque droite* (D) *de la congruence il existe deux points* F, F' *auxquels correspondent deux plans* (P), (P') *passant par la droite* D, *et tels que toutes les surfaces réglées de la congruence passant par la droite* D *ont pour plans tangents en* F, F' *respectivement les plans* (P), (P'). Ces points F, F' s'appellent *foyers* ou *points focaux* de la droite (D), les plans (P) (P') sont les *plans focaux* associés à F, F'. Pour démontrer la proposition, cherchons le plan tangent en un point quelconque de la génératrice (1). Les paramètres l, m, n de ce plan tangent satisfont aux équations :

$$(3) \qquad la + mb + nc = 0,$$

$$(3') \qquad l(df + u\,da) + m(dg + u\,db) + n(dh + u\,dc) = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut choisir u de façon que le plan tangent soit indépendant des différentielles dv, dw, et par suite indépendant de la relation existant entre v, w, c'est-à-dire indépendant de la surface réglée. Développons la deuxième équation (3) :

$$0 = \left[l \left(\frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial a}{\partial v}\right) + m\left(\frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial b}{\partial v}\right) + n\left(\frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial c}{\partial v}\right)\right] dv +$$
$$+ \left[l \left(\frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial a}{\partial w}\right) + m\left(\frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial b}{\partial w}\right) + n\left(\frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial c}{\partial w}\right)\right] dw.$$

Pour que le plan tangent soit indépendant de dv, dw, il faut et il suffit que l'on ait, à la fois :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & l \left(\frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial a}{\partial v}\right) + m\left(\frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial b}{\partial v}\right) + n\left(\frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial c}{\partial v}\right) = 0 \\ & l \left(\frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial a}{\partial w}\right) + m\left(\frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial b}{\partial w}\right) + n\left(\frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial c}{\partial w}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les relations (4) et la relation (3) doivent être satisfaites pour des

valeurs non toutes nulles de l, m, n, donc leur déterminant doit être nul :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial c}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial a}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial b}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial c}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les u des points focaux ; elle est du deuxième degré, donc il y a deux points focaux ; le plan focal correspondant à chacun d'eux aura pour coefficients les valeurs de l, m, n satisfaisant aux équations (3) et (4).

Remarque. — L'équation (5) ne peut être une identité en u, quels que soient v et w ; car le terme constant ne s'annule que si le rayon de la congruence est tangent au support : on peut donc supposer le support choisi de manière que ce terme ne soit pas nul, pour le rayon considéré, s'il n'est pas singulier.

Quant aux équations (3) et (4) en l, m, n, les relations entre les plans focaux et le lieu des foyers, que nous allons étudier, montrent que le cas d'indétermination ne peut se présenter aussi que pour des rayons singuliers.

Il faut, pour cela, que les mineurs du premier membre de l'équation (5) soient tous nuls ; et, par conséquent, que u soit racine double, c'est-à-dire que les foyers du rayon soient confondus. Mais cette dernière condition n'est pas suffisante.

Ces deux cas d'indétermination seront exclus, dans la suite, de cette étude : les propriétés des droites de la congruence que nous obtiendrons s'appliqueront seulement, en général, à des rayons non singuliers.

Les congruences formées, soit des droites d'un plan, soit des droites passant par un point, sont les seules dont toutes les droites soient singulières, à l'un des deux points de vue précédents. Elles ont été, implicitement, exclues dans ce qui précède.

Surfaces focales. — Courbes focales

Le lieu des foyers s'obtiendrait sans difficulté. Il suffirait de tirer u de (5) et de porter sa valeur dans (1). L'équation (5) étant du deuxième degré donne pour u deux valeurs, de sorte que le lieu se compose de deux

parties distinctes dans le voisinage de la droite (D). Considérons l'une de ces parties ; elle peut être une surface, que l'on appellera *surface focale*, ou une courbe, que l'on appellera *courbe focale*, ou bien elle peut se réduire à un point, et la congruence comprend alors toutes les droites passant par ce point. En écartant ce cas, on voit que le lieu des foyers peut se composer de deux surfaces, d'une courbe et d'une surface, ou de deux courbes.

1° Supposons qu'une portion du lieu des foyers soit une surface (Φ). Prenons cette surface comme support de la congruence ; l'équation (5) a pour racine $u = 0$, donc :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci exprime que la droite (D) est dans le plan tangent à la surface (Φ) au point M ($u = 0$), qui est l'un des foyers, soit F. *Ainsi les droites de la congruence sont tangentes à la surface focale au foyer correspondant.* Cherchons le plan focal correspondant à F. Ses coefficients l, m, n sont déterminés par les équations :

$$\begin{cases} la + mb + nc = 0, \\ l\frac{\partial f}{\partial v} + m\frac{\partial g}{\partial v} + n\frac{\partial h}{\partial v} = 0, \\ l\frac{\partial f}{\partial w} + m\frac{\partial g}{\partial w} + n\frac{\partial h}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

D'après la condition précédemment écrite, ces équations se réduisent à deux, et expriment que *le plan focal correspondant au foyer* F *est le plan tangent en* F *à la surface* (Φ). *Toutes les surfaces réglées gauches de la congruence sont circonscrites à la surface focale.* Le cas des surfaces développables sera discuté plus loin [§ 2] : il échappe au raisonnement précédent, si F est un point de l'arête de rebroussement.

2° Il résulte de ce qui précède que *si le lieu des foyers* F, F′ *comprend deux surfaces focales* (Φ), (Φ'), *les droites de la congruence sont tangentes aux deux surfaces focales, les foyers* F, F′ *sont les points de contact, les plans focaux sont les plans tangents aux surfaces focales aux foyers correspondants. Le lieu des foyers coïncide avec l'enveloppe des plans focaux.*

Réciproquement, étant données deux surfaces quelconques (Φ), (Φ'), leurs tangentes communes dépendent de deux paramètres. En effet soit F un point de (Φ). Considérons le plan tangent en F à (Φ) ; il coupe (Φ') suivant une certaine courbe ; si nous menons de F des tangentes à cette courbe, ces droites, qui sont tangentes aux deux surfaces (Φ), (Φ'), sont déterminées quand le point F est déterminé ; elles dépendent d'autant de paramètres que le point F, donc de deux paramètres ; elles constituent une congruence, dont les surfaces réglées sont circonscrites aux surfaces (Φ), (Φ'), qui sont les surfaces focales.

Si les surfaces (Φ), (Φ') constituent deux nappes d'une même surface (S), comme cela arrive en général, la congruence sera constituée par les tangentes doubles de la surface (S).

3° Supposons qu'une portion du lieu des foyers soit une courbe (φ), que nous prendrons pour support de la congruence. Alors f, g, h ne dépendent que d'un paramètre, v par exemple ; $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$ sont nuls, et $u = 0$ est racine de l'équation (5). *Si les droites d'une congruence rencontrent une courbe fixe, les points de cette courbe sont des foyers pour les droites de la congruence qui y passent.* Cherchons le plan focal correspondant. Ses coefficients sont déterminés par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} & la + mb + nc = 0, \\ & l\frac{\partial f}{\partial v} + m\frac{\partial g}{\partial v} + n\frac{\partial h}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc le plan focal passe par la droite (D) *et est tangent à la courbe focale. Toutes les surfaces réglées gauches de la congruence passent par la courbe focale, et en un point* M *de cette courbe sont tangentes au plan tangent à cette courbe passant par la droite* (D). Le cas des surfaces développables sera étudié au § 2.

4° Supposons qu'il y ait une surface focale (Φ) et une courbe focale (φ') ; *la congruence est constituée par les droites rencontrant* (φ') *et tangentes à* (Φ). On a immédiatement les foyers et les plans focaux, d'après ce qui précède. *Réciproquement, les droites rencontrant une courbe* (φ') *et tangentes à une surface* (Φ) *constituent une congruence qui admet* (φ') *et* (Φ) *pour lieu de ses foyers.*

5° Supposons qu'il y ait deux courbes focales (φ), (φ'). *La congruence est constituée par les droites rencontrant* (φ), (φ'), *et ses surfaces réglées gauches contiennent les deux courbes focales. Réciproquement les droites rencontrant deux courbes données constituent une congruence qui admet ces deux courbes comme courbes focales.*

Si (φ), (φ') constituent deux parties d'une même courbe (c), la congruence est constituée par les droites rencontrant (c) en deux points, c'est-à-dire par les cordes de (c).

Cas singuliers

Voyons dans quels cas les deux foyers sont confondus sur toutes les droites de la congruence.

D'après la définition même des foyers et des plans focaux, ceux-ci sont aussi confondus, et réciproquement, car les plans focaux sont tangents à une même surface réglée aux foyers correspondants, et, ainsi, qu'on le verra au § 2, on peut supposer que cette surface réglée n'est pas développable.

1° Examinons, en premier lieu, le cas de deux surfaces focales confondues. Considérons d'abord, à cet effet, une surface focale (Φ) d'une congruence quelconque ; en chaque point F de cette surface est tangente une droite (D) de la congruence. Si on associe ces points focaux et les droites correspondantes, il existe sur la surface une famille de courbes tangentes en chacun de leurs points à la droite correspondante de la congruence. Prenons, pour le montrer, la focale (Φ) comme support de la congruence : la droite (D) est tangente à ce support, ses coefficients directeurs sont donc, P et Q étant des fonctions de v, w,

$$a = P\frac{\partial f}{\partial v} + Q\frac{\partial f}{\partial w}, \qquad b = P\frac{\partial g}{\partial v} + Q\frac{\partial g}{\partial w}, \qquad c = P\frac{\partial h}{\partial v} + Q\frac{\partial h}{\partial w}.$$

Soit une courbe de la surface (Φ), définie en exprimant v, w en fonction d'un paramètre ; les coefficients directeurs de la tangente sont :

$$dx = \frac{\partial f}{\partial v}.dv + \frac{\partial f}{\partial w}.dw, \quad dy = \frac{\partial g}{\partial v}.dv + \frac{\partial g}{\partial w}.dw, \quad dz = \frac{\partial h}{\partial v}.dv + \frac{\partial h}{\partial w}.dw;$$

et pour que cette tangente soit la droite (D), il faut et il suffit que :

$$\frac{dv}{P} = \frac{dw}{Q}.$$

Pour déterminer l'un des paramètres v, w en fonction de l'autre, on doit donc intégrer une équation différentielle du premier ordre. La famille de courbes ainsi déterminée dépend d'un paramètre : prenons-la pour famille $w = c^{te}$. Alors les coefficients de direction des rayons de la congruence seront :

$$a = \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad b = \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad c = \frac{\partial h}{\partial v};$$

et les équations générales de ces rayons s'écriront :

$$(6)\quad x = f(v, w) + u\frac{\partial f}{\partial v}, \quad y = g(v, w) + u\frac{\partial g}{\partial v}, \quad z = h(v, w) + u\frac{\partial h}{\partial v}.$$

L'équation aux points focaux (5) deviendra :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} & \frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ \frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial^2 h}{\partial v \partial w} \end{vmatrix} = 0,$$

et en retranchant la première ligne de la deuxième, u viendra en facteur.

Cela posé, supposons que les points focaux soient, deux à deux, confondus : il faut et il suffit, pour cela, que le déterminant s'annule encore pour $u = 0$, ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = 0$$

ou $E' = 0$. Cela exprime que l'équation des lignes asymptotiques de la surface (Φ), qui est :

$$E'dv^2 + 2F'dv.dw + G'dw^2 = 0,$$

est satisfaite pour $dw = 0$; c'est-à-dire que les courbes $w =$ c^te^ sont des asymptotiques de la surface (Φ). Ainsi *les congruences à surface focale double sont constituées par les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface quelconque, non développable.*

L'hypothèse d'une focale double développable se trouve exclue de notre conclusion, parce que les asymptotiques étant les génératrices, leurs tangentes ne dépendraient plus que d'un paramètre.

Nous reviendrons sur cette hypothèse au § 3, et nous verrons qu'elle est inadmissible.

2° Considérons maintenant le cas de deux courbes focales confondues. Prenons la courbe focale double (φ) pour support : f, g, h sont

fonctions de v seulement. Exprimons alors que l'équation (5) admet pour racine double $u = 0$, nous obtenons la condition :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial a}{\partial w} & \frac{\partial b}{\partial w} & \frac{\partial c}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Les droites (D) de la congruence passant par un point F de la courbe (φ) engendrent un cône. Le plan tangent à ce cône a pour coefficients les déterminants déduits du tableau :

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial w} & \frac{\partial b}{\partial w} & \frac{\partial c}{\partial w} \end{Vmatrix};$$

et la condition précédente exprime que la tangente FT à la courbe focale est dans le plan tangent au cône ; ceci devant avoir lieu quelle que soit la génératrice du cône que l'on considère, tous les plans tangents au cône passent par FT, et le cône se réduit à un plan. *Une congruence à courbe focale double est engendrée par les droites qui en chaque point* F *d'une courbe* (φ) *rayonnent autour de F dans un plan passant par la tangente* à (φ) ; *et réciproquement.* Ici l'enveloppe des plans focaux ne coïncide plus avec le lieu des points focaux.

Développables de la congruence

2. — Cherchons si l'on peut associer les droites de la congruence de façon à obtenir des surfaces développables. Reprenons, à cet effet, les équations de la droite (D) :

$$(1) \qquad x = f(v,w) + u.a(v,w), \qquad y = g(v,w) + u.b(v,w),$$
$$z = h(v,w) + u.c(v,w) ;$$

la condition pour que cette droite engendre une surface développable est [ch. V, § 1, équ. (5)] :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ da & db & dc \\ df & dg & dh \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial v}dv + \frac{\partial a}{\partial w}dw & \frac{\partial b}{\partial v}dv + \frac{\partial b}{\partial w}dw & \frac{\partial c}{\partial v}dv + \frac{\partial c}{\partial w}dw \\ \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw & \frac{\partial g}{\partial v}dv + \frac{\partial g}{\partial w}dw & \frac{\partial h}{\partial v}dv + \frac{\partial h}{\partial w}dw \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation différentielle qui exprime que la droite de la congruence engendre une surface développable. Elle est de la forme :

$$A dv^2 + 2B dv.dw + C dw^2 = 0 ;$$

elle donne deux valeurs pour $\frac{dv}{dw}$, il y a donc deux familles de ∞^1 développables engendrées par des rayons de la congruence, qu'on appelle *développables de la congruence. Par chaque droite de la congruence passent deux développables de la congruence.*

Cherchons les points de contact de cette droite avec les arêtes de rebroussement. La valeur de u qui fournit les coordonnées (1) de l'un de ces points doit vérifier les équations [ch. V, § 1, équ. (4)] :

$$\begin{cases} df + u.da + a.d\rho = 0, \\ dg + u.db + b.d\rho = 0, \\ dh + u.dc + c.d\rho = 0 ; \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial a}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial a}{\partial w}\right) dw + a.d\rho = 0, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial b}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial b}{\partial w}\right) dw + b.d\rho = 0, \\ \left(\frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial c}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial c}{\partial w}\right) dw + c.d\rho = 0. \end{cases}$$

Eliminant, entre ces équations, dv, dw, $d\rho$, nous obtenons pour déterminer l'u du point de contact de la droite avec l'arête de rebroussement, l'équation (5) [§ 1] qui donne les points focaux. Donc *les points où une droite* (D) *de la congruence touche les arêtes de rebroussement des deux développables de la congruence qui passent par cette droite sont les foyers de la droite* (D).

Ces résultats peuvent s'obtenir sans calcul. Soit, en effet, (Δ) l'une des deux développables qui passent par (D) ; l'un au moins des foyers n'est pas sur son arête de rebroussement : soit F ce foyer. En ce point, le plan tangent à (Δ) est le plan focal (P) associé à F. Au foyer F', le second plan focal (P'), qui est différent de (P), doit être tangent à (Δ) : cela exige que F' soit sur l'arête de rebroussement, puisque, (Δ) étant développable, le plan tangent est le plan (P) tout le long de la génératrice,

sauf au point où (D) est tangente à l'arête de rebroussement, pour lequel le plan tangent est indéterminé.

On voit aussi que *le plan tangent, le long de* (D), *à une des développables de la congruence qui passent par* (D), *est le plan focal associé au foyer qui n'est pas sur l'arête de rebroussement de cette développable.*

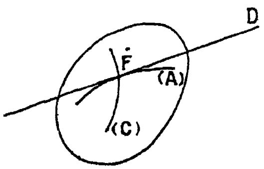
Si la développable est un cône ou un cylindre, il faut interpréter les résultats précédents en considérant le sommet de la surface, situé à distance finie ou infinie, comme constituant l'arête de rebroussement.

On peut dire, d'une manière générale, que *chaque rayon* (D) *est rencontré par deux rayons infiniment voisins : les points de rencontre sont les foyers, les plans passant par* (D) *et par chacun des deux rayons infiniment voisins sont les plans focaux, et le plan focal fourni par l'un de ces rayons est associé au foyer fourni par l'autre.*

Développables et surface focale

Supposons que le lieu des points focaux comprenne une surface (Φ). Il résulte de ce qui précède que toute développable de la congruence est circonscrite à cette surface, ou a son arête de rebroussement sur elle. Examinons les choses de plus près.

En chaque point F de la surface (Φ) passe une droite (D) de la congruence, tangente en F à (Φ), et admettant F pour foyer. Nous avons montré incidemment, page 126, qu'il existe sur la surface (Φ) une famille de courbes (A) tangentes aux droites (D). La développable qui a pour arête de rebroussement une de ces courbes (A) est une développable de la congruence. Nous obtenons ainsi une des familles de développables. Considérons alors les courbes (C) qui forment avec (A), sur (Φ), un réseau conjugué, et la développable enveloppe des plans tangents à (Φ) tout le long d'une de ces courbes (C) ; la génératrice de cette développable en un point F de (C) est la caractéristique du plan tangent, c'est la tangente conjuguée de la tangente à (C), c'est la droite (D). Nous obtenons donc la deuxième famille de développables en prenant l'enveloppe des plans tangents à (Φ) en tous les points de chacune des courbes (C), conjuguées des courbes (A).



On retrouve ces résultats analytiquement en prenant les équations

de la congruence sous la forme (6) [§ 1], qui met en évidence les courbes (A). Ce sont alors les courbes $w = c^{te}$.

L'équation (2), qui définit les développables, devient ainsi :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v.\partial w}\,dw & \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial v}.dv + \frac{\partial f}{\partial w}\,dw & \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchons des éléments de la troisième ligne ceux de la première multipliés par dv ; l'équation prend la forme :

$$(E'dv + F'dw)\,dw = 0\,;$$

nous trouvons d'abord $dw = 0$ (courbes A) ; et la relation

$$E'dv + F'dw = 0$$

définit précisément les courbes (C) conjuguées des courbes $w = c^{te}$.

Développables et courbe focale

Examinons maintenant le cas d'une courbe focale (φ), que nous prendrons pour support :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v).$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial g}{\partial w}$, $\frac{\partial h}{\partial w}$ sont nuls, et l'équation (2) devient :

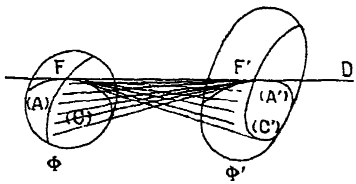
$$\begin{vmatrix} a & \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial a}{\partial v}\,dv + \frac{\partial a}{\partial w}\,dw & \cdot\ \cdot \\ \frac{df}{dv}\,dv & \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = 0\,;$$

dv est en facteur. L'une des familles de développables est formée par les droites $v = c^{te}$, c'est-à-dire par toutes les droites de la congruence passant par un même point F de (φ). Ce sont des cônes.

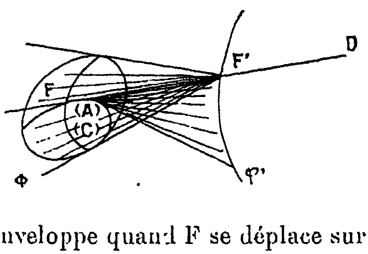
Examen des divers cas possibles

Examinons alors les divers cas possibles relativement à la nature du lieu des foyers.

1° Supposons qu'il y ait deux surfaces focales (Φ), (Φ'). Toute droite (D) de la congruence est tangente à (Φ), (Φ'), aux deux points F, F', foyers de (D). Considérons une des développables ayant pour arête de rebroussement l'une des courbes (A). Toutes ses génératrices sont tangentes à (Φ'), cette développable est circonscrite à (Φ') le long d'une courbe (C') que nous appellerons *courbe de contact*. Le plan focal correspondant à F est le plan tangent en F à la surface (Φ). Le deuxième plan focal est le plan tangent en F' à (Φ') ; et, comme la développable est circonscrite à (Φ'), ce plan tangent est le plan tangent à la développable au point F', c'est-à-dire le long de la génératrice (D) ; c'est le plan osculateur à l'arête de rebroussement (A) au point F.



Il y a évidemment réciprocité entre (Φ), (Φ'). L'autre série de développables aura pour arêtes de rebroussement les enveloppes des droites (D) sur la surface (Φ'). Soient (A') ces arêtes de rebroussement. Ces développables seront circonscrites à (Φ) le long des courbes de contact (C). *Nous avons ainsi déterminé sur (Φ) et (Φ') deux réseaux conjugués qui se correspondent* de manière qu'aux courbes (A) correspondent les courbes (C'), et aux courbes (C) les courbes (A'); l'une des familles de courbes correspondantes étant constituée par des arêtes de rebroussement, et l'autre par des courbes de contact.



Le deuxième foyer F' est le point de contact de la droite (D) avec son enveloppe quand F se déplace sur la courbe (C) [Cf. Ch. VIII, § 3].

2° Supposons une surface focale (Φ) et une courbe focale (φ'). Une des séries de développables est constituée par des cônes ayant leurs sommets sur (φ'). Les courbes (C) sur (Φ) sont les courbes de contact des cônes circonscrits à (Φ) qui ont pour sommets les divers points de (φ'). Les plans focaux sont : le plan osculateur à (A) au point F et le plan tangent à (Φ) au point F, c'est-à-dire le plan tangent à

(φ') passant par D, et le plan tangent au cône de la congruence de sommet F', le long de D. Les courbes (C), (A) forment un réseau conjugué sur (Φ).

3° Supposons enfin deux courbes focales (φ) (φ') ; les deux familles de développabies sont des cônes passant par l'une des courbes et ayant leurs sommets sur l'autre.

Cas singuliers

Voyons maintenant le cas des foyers confondus.

1° Il y a une *surface focale double* non développable. Dans ce cas, la congruence est constituée par les tangentes à une famille d'asymptotiques de cette surface [§ 1, page 127]. Il n'y a plus qu'une famille de développables, ayant pour arêtes de rebroussement ces asymptotiques. Prenons, en effet, cette surface pour support, et pour courbes $w = c^{te}$ ces asymptotiques. L'équation différentielle qui détermine les développables est, comme on l'a vu [page 131] :

$$(E'dv + F'dw)\,dw = 0.$$

L'équation des lignes asymptotiques est :

$$E'dv^2 + 2F'dv.dw + G'dw^2 = 0\,;$$

elle doit être vérifiée pour $dw = 0$, donc $E' = 0$, et l'équation qui détermine les développables devient $dw^2 = 0$, ce qui démontre le résultat énoncé.

2° Il y a une *courbe focale double* (φ). Les droites de la congruence sont dans des plans tangents aux divers points de (φ). Une famille de ces développables est donc constituée par ces plans. On aperçoit immédiatement deux autres développables particulières, l'enveloppe des plans tangents précédents, et la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe (φ). Il est facile de voir qu'il n'y en a pas d'autre.

Soit, en effet, la courbe (φ) :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v)\,;$$

la tangente a pour coefficients directeurs les dérivées f', g', h' ; donnons-nous en chaque point les coefficients directeurs d'une droite particulière de la congruence $a_0(v)$, $b_0(v)$, $c_0(v)$. Une droite quelconque de la congruence aura pour coefficients directeurs :

$$a = f'(v) + wa_0(v), \quad b = g'(v) + wb_0(v), \quad c = h'(v) + wc_0(v),$$

L'équation différentielle des développables est alors :

$$\begin{vmatrix} f' + wa_0 & .. \\ (f'' + wa'_0)dv + a_0.dw & .. \\ f'dv & .. \end{vmatrix} = 0\,;$$

dv est en facteur ; en retranchant la troisième ligne, divisée par dv, de la première, w est en facteur, et l'équation se réduit à :

$$w.dv^2 \begin{vmatrix} a_0 & .. \\ f'' + wa'_0 & .. \\ f' & .. \end{vmatrix} = 0.$$

Nous trouvons $dv = 0$ qui correspond aux plans tangents ; $w = 0$ qui correspond à la développable d'arête de rebroussement (φ), et enfin :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ f'' & g'' & h'' \\ f' & g' & h' \end{vmatrix} + w. \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a'_0 & b'_0 & c'_0 \\ f' & g' & h' \end{vmatrix} = 0,$$

qu'il reste à interpréter.

Or le plan tangent considéré, en un point de la courbe (φ), a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - f & y - g & z - h \\ f' & g' & h' \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons son enveloppe : la caractéristique est l'intersection de ce plan avec le plan :

$$\begin{vmatrix} x - f & y - g & z - h \\ f'' & g'' & h'' \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x - f & y - g & z - h \\ f' & g' & h' \\ a'_0 & b'_0 & c'_0 \end{vmatrix} = 0.$$

La droite (D) :

$$x = f + u\,[f' + wa_0(v)], \qquad y = ..., \qquad z = ...,$$

est, quel que soit w, dans le premier plan.

Exprimons qu'elle est dans le deuxième : cela donne, pour déterminer w, l'équation :

$$\begin{vmatrix} f' + wa_0 & .. \\ f'' & .. \\ a_0 & .. \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f' + wa_0 & .. \\ f' & .. \\ a'_0 & .. \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (1).

Celle-ci définit donc bien l'enveloppe des plans qui contiennent les droites de la congruence.

Cas des surfaces focales développables

3. — Nous avons trouvé comme cas particulier du lieu des foyers une courbe. En examinant la question au *point de vue corrélatif* du principe de *dualité*, nous sommes conduits à examiner *le cas où l'enveloppe des plans focaux est une surface développable*, soit (Φ). Soit (Φ') l'autre nappe de la surface focale. Les droites de la congruence sont tangentes à (Φ), (Φ') ; or une tangente à la développable (Φ) doit être dans l'un des plans tangents qui enveloppent cette développable ; les droites de la congruence sont donc les tangentes à (Φ') qui sont dans les plans tangents à (Φ), ce sont les tangentes aux sections de (Φ') par les plans qui enveloppent (Φ). Dans ce cas, les arêtes de rebroussement (A') sur la surface (Φ') sont des courbes planes, les développables correspondantes étant les plans de ces courbes. Les foyers d'une droite (D) sont : le point de contact avec (Φ'), et le point d'intersection avec la caractéristique du plan tangent à la développable (Φ). L'autre famille de développables aura ses arêtes de rebroussement sur la surface (Φ), et correspondant aux courbes (C') conjuguées des courbes (A').

Réciproquement, si les arêtes de rebroussement des développables situées sur une des nappes de la surface focale sont des courbes planes, les développables correspondantes seront des plans, et leur enveloppe sera la deuxième nappe de la surface focale.

Pour avoir une congruence de cette espèce, on peut prendre arbitrairement la développable (Φ), et sur cette développable, une famille de courbes quelconque. Les tangentes à ces courbes engendrent une congruence de l'espèce considérée, car l'une des familles de développables est évidemment constituée par les plans tangents à la développable (Φ) ; les courbes de contact sur la développable sont les génératrices, qui peuvent être considérées comme conjuguées à toute famille de courbes.

Le cas, corrélatif de lui-même, où la congruence possède *une courbe focale et une surface focale développable*, sera étudié au § 5.

Supposons que les deux nappes de la surface focale soient développables. Il suffit de partir d'une développable (Φ), et de la couper par une famille de plans dépendant d'un paramètre. Les sections seront les courbes (A), et les plans de ces sections envelopperont l'autre développable focale. On peut dire dans ce cas que l'on a deux familles de

plans, à un paramètre, les droites de la congruence étant les intersections de chaque plan d'une famille avec chaque plan de l'autre.

On peut vérifier que l'*hypothèse d'une surface focale double développable est à rejeter*. Étant donnée, en effet, une surface développable :

$$(1) \quad x = f(v) + wf'(v), \quad y = g(v) + wg'(v), \quad z = h(v) + wh'(v),$$

toute droite (D) d'une congruence admettant cette surface pour focale lui est tangente, et a des coefficients directeurs de la forme :

$$(2) \quad a = f'(v) + \theta f''(v), \quad b = g'(v) + \theta g''(v), \quad c = h'(v) + \theta h''(v),$$

θ étant une certaine fonction de v et w. On reconnaît alors que, si on prend la focale (1) pour support de la congruence, l'équation aux points focaux [§ 1, équ. (5)] s'écrit :

$$\begin{vmatrix} f' & f'' & f''' \\ g' & g'' & g''' \\ h' & h'' & h''' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \theta & 0 \\ 1 & w + u + u\dfrac{\partial\theta}{\partial v} & u\theta \\ 1 & u\dfrac{\partial\theta}{\partial w} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier facteur n'est pas nul, l'arête de rebroussement n'étant pas plane. Le second se réduit à :

$$u\theta\left(u\frac{\partial\theta}{\partial w} - \theta\right) = 0.$$

Or θ n'est pas nul, sans quoi les seules droites (D) seraient les génératrices de la développable. Il est donc impossible que les points focaux soient confondus.

Les *deux cas singuliers*, où les focales sont doubles, se correspondent à eux-mêmes au point de vue corrélatif. Cela résulte, pour le cas d'une surface focale double, de cette remarque que les asymptotiques d'une surface se correspondent à elles-mêmes ; car une asymptotique est telle que le plan osculateur en l'un de ses points soit tangent à la surface; et, au point de vue corrélatif, un point d'une courbe se transforme en plan osculateur d'une arête de rebroussement, et inversement.

Dans le cas où le lieu des foyers est une courbe focale double, à chaque point de laquelle est associé un plan focal unique, tangent à la courbe, une transformation dualistique fera correspondre, aux ∞^1 foyers, ∞^1 plans focaux ; et à chacun d'eux sera associé un foyer unique situé sur l'enveloppe de ces plans focaux. On aura donc bien de nouveau une courbe unique pour lieu des foyers, avec ∞^1 plans focaux tangents à cette courbe.

Introduction des éléments de contact. — Focales rectilignes. — Congruences de Kœnigs.

4. — Il y a un *autre cas particulier corrélatif de lui-même*, auquel on est tout naturellement conduit, quand on fait intervenir, dans la théorie des congruences, les notions fondamentales de la *géométrie des éléments de contact* (Sophus Lie).

On appelle *élément de contact* le système constitué par un point M et un plan passant par ce point. Les surfaces, les courbes et les points peuvent être considérés comme des *multiplicités*, dont chacune est formée de ∞^2 éléments de contact : en chaque point d'une surface, il y a un plan tangent et un seul, ce qui donne ∞^2 éléments de contact ; sur une courbe, il y a ∞^1 points, et, en chaque point, ∞^1 plans tangents, ce qui donne encore ∞^2 éléments de contact ; pour les développables, nous avons ∞^1 plans et ∞^2 points, donnant ∞^2 éléments de contact ; une droite est, de même, constituée par ∞^2 éléments de contact obtenus en associant de toutes les manières possibles les ∞^1 points de la droite et les ∞^1 plans passant par la droite ; un plan a pour éléments de contact les ∞^2 éléments qu'il forme avec ses divers points ; un point a pour éléments de contact les ∞^2 éléments qu'il forme avec les divers plans qui le contiennent Le contact de deux surfaces, ou d'une surface et d'une ligne, la rencontre de deux lignes, le fait qu'un point appartient à une surface ou à une ligne, toutes ces relations géométriques d'apparences si diverses, s'interprètent alors d'une manière unique : les deux multiplicités considérées ont en commun un élément de contact.

Dans la théorie des congruences, les foyers et les plans focaux associés d'un rayon constituent les *éléments de contact focaux* de ce rayon, qui sont communs à toutes les surfaces réglées de la congruence, passant par ce rayon. Les surfaces focales, courbes focales, développables focales, sont les *multiplicités focales, engendrées par les éléments de contact focaux,* et chacune a un élément de contact commun avec chaque rayon.

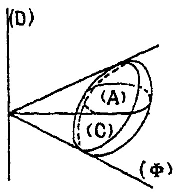
Une multiplicité focale est le lieu de ∞^2 éléments focaux ; mais il n'y en a plus que ∞^1 dans le cas d'une courbe focale double : ils constituent alors une *bande* ou *bandeau d'éléments*, qui a cette courbe pour *support* [Cf. Ch. VII, § 4].

Relativement à la nature particulière des multiplicités focales, nous avons considéré tous les cas possibles, sauf celui où l'une des multiplicités focales est une droite.

Nous écartons les cas où une multiplicité focale serait un plan ou un

point : la congruence se réduisant alors aux droites du plan, ou aux rayons issus du point.

La droite peut être considérée comme le lieu de ∞^1 points, ou comme l'enveloppe de ∞^1 plans ; c'est donc à la fois une courbe et une développable ; il en résulte que, dans une congruence dont une focale est une droite, une des familles de développables de la congruence est constituée par des cônes ayant leurs sommets sur la droite, et l'autre par des plans passant par la droite. Si, en particulier, la congruence a pour multiplicités focales une droite (δ) et une surface (Φ), les familles de développables seront, d'une part les cônes circonscrits à (Φ) par les différents points de (δ), ce qui donne les courbes de contact (C) ; et d'autre part les plans passant par (δ), qui coupent (Φ) suivant les arêtes de rebroussement (A). Et les courbes (A), (C) forment un système de courbes conjuguées [p. 130]. On obtient ainsi le *Théorème de Kœnigs : Les courbes de contact des cônes circonscrits à une surface par les divers points d'une droite* (δ), *et les sections de cette surface par les plans passant par* (δ) *constituent un réseau conjugué.*



Remarque. — Si les multiplicités focales sont deux droites, (δ) et (δ'), la congruence est constituée par les droites qui rencontrent ces deux droites. C'est une *congruence linéaire* dont les droites (δ) et (δ') sont les *directrices*.

Dans le cas d'une *droite focale double* (δ), c'est-à-dire d'une ligne focale double rectiligne, à chaque point A de la droite correspondra un plan (P) passant par cette droite, et la congruence sera constituée par les droites (D) situées dans les plans (P) et passant par les points A de (δ). Si la correspondance entre les points A et les plans (P) est homographique, on obtiendra ainsi une *congruence linéaire spéciale*, à directrice double (voir ch. X).

Application. Surfaces de Joachimsthal.

Rechercher les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont dans des plans passant par une droite fixe (δ).

Soit (Φ) une surface répondant à la question ; imaginons les tangentes aux lignes de courbure considérées ; ces tangentes (D) constituent une congruence, et comme les lignes de courbure sont dans des plans passant par (δ), ces droites (D) rencontrent la droite (δ) ; (Φ) est une des nappes de la surface focale : les développables sont, d'une

part, les plans des lignes de courbure, et, d'autre part, les cônes circonscrits à (Φ) qui ont pour sommets les différents points de (δ). Donc, d'après le théorème de Kœnigs, les courbes de contact constituent un système conjugué du premier système de lignes de courbure, et, par suite, forment le deuxième système de lignes de courbure. Si nous considérons ce deuxième système, le cône circonscrit coupe la surface (Φ) suivant un angle constamment nul ; la courbe de contact, qui est une ligne de courbure de (Φ), est donc aussi une ligne de courbure du cône circonscrit, d'après le Théorème de Joachimsthal ; c'est donc une trajectoire orthogonale des génératrices, c'est-à-dire l'intersection du cône avec une sphère ayant son centre au sommet ; le deuxième système de lignes de courbure est donc constitué par des courbes sphériques ; et les sphères correspondantes coupent orthogonalement les cônes circonscrits, et, par suite, la surface (Φ), le long des lignes de courbure. *La surface* (Φ) *est donc trajectoire orthogonale d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* (δ).

Cette propriété est caractéristique de la surface (Φ). Supposons, en effet, une famille de sphères ayant leurs centres sur (δ), et une surface (Φ) orthogonale à chacune de ces sphères tout le long de la courbe d'intersection ; l'intersection est une ligne de courbure de la sphère, et comme l'angle de (Φ) et de la sphère est constamment droit, c'est une ligne de courbure de (Φ). Si on joint le centre A de la sphère à un point M de la ligne de courbure, cette droite est normale à la sphère, donc tangente à la surface (Φ), de sorte que la ligne de courbure est la courbe de contact du cône circonscrit à (Φ) qui a le point A pour sommet. Une des familles de lignes de courbure étant les courbes de contact des cônes circonscrits à (Φ) qui ont leurs sommets sur (δ), l'autre famille est bien, d'après le théorème de Kœnigs, constituée par les sections planes faites dans (Φ) par les plans qui passent par (δ).

Nous sommes ainsi conduits à rechercher les surfaces qui coupent à angle droit une famille donnée de sphères, ayant leurs centres sur (δ), tout le long des courbes d'intersection. Soit (Φ) une telle surface, et (Σ) une des sphères de la famille. Le plan qui passe par (δ) et un point M de l'intersection de (Φ) et de (Σ) est aussi orthogonal à (Σ). Donc la section de (Φ) par ce plan est orthogonale, en M, à (Σ) ; et, par conséquent, au grand cercle de (Σ) situé dans ce plan.

Ainsi, la section de (Φ) par un plan quelconque passant par (δ), qui, d'après ce qui précède, est l'une des lignes de courbure planes de (Φ), est trajectoire orthogonale de la famille des grands cercles déterminés par ce plan dans les sphères données. Si on considère un autre plan passant par (δ), la ligne de courbure située dans ce plan sera aussi trajectoire orthogonale de la famille de grands cercles obtenue de

même. En rabattant le second plan sur le premier, les deux familles de grands cercles se superposeront et on aura une autre trajectoire orthogonale de la même famille de grands cercles.

On considérera donc dans un plan passant par (δ) *une famille de cercles ayant leurs centres sur* (δ), *on en déterminera les trajectoires orthogonales, et on fera tourner chacune de ces trajectoires orthogonales autour de* (δ) *d'un angle qui lui corresponde et qui varie d'une manière continue quand on passe d'une trajectoire à la trajectoire infiniment voisine. Le lieu des courbes ainsi obtenues sera la surface* (Φ), si la famille des cercles et la loi de rotation sont convenablement choisies.

Quelle que soit d'ailleurs cette loi de rotation, et quelle que soit la famille des cercles, on obtient toujours ainsi une surface répondant à la question : cette surface sera en effet engendrée par des courbes qui couperont orthogonalement la famille de sphères ayant pour grands cercles les cercles considérés, et par conséquent la surface coupera à angle droit toutes ces sphères tout le long des courbes d'intersection.

Nous allons donc chercher les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles situés dans un plan, et ayant leurs centres sur une droite (δ). *Cherchons plus généralement les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles d'un plan*, que nous définirons en donnant les coordonnées (a, b) du centre I, et le rayon R, en fonction d'un paramètre u. Considérons une trajectoire orthogonale, rencontrant un des cercles en un point M. Les coordonnées du point M sont, en fonction du paramètre u :

$$(1) \qquad x = a + R\cos\varphi, \qquad y = b + R\sin\varphi,$$

φ étant une fonction de u convenablement choisie. Tout revient à déterminer cette fonction de u de manière que la courbe représentée par les équations (1) soit normale à tous les cercles. La normale IM au cercle a pour paramètres directeurs $\cos\varphi$, $\sin\varphi$; elle doit être tangente à la courbe, ce qui donne la condition :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} da + \cos\varphi.dR - R\sin\varphi.d\varphi & db + \sin\varphi.dR + R\cos\varphi.d\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$\sin\varphi.da - \cos\varphi.db - Rd\varphi = 0,$$

ou encore :

$$(3)\qquad \frac{d\varphi}{du} = \frac{a'}{R}\sin\varphi - \frac{b'}{R}\cos\varphi, \qquad \left(a' = \frac{da}{du},\ b' = \frac{db}{du}\right).$$

Si nous posons :

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = w,$$

d'où :

$$d\varphi = \frac{2dw}{1 + w^2}.$$

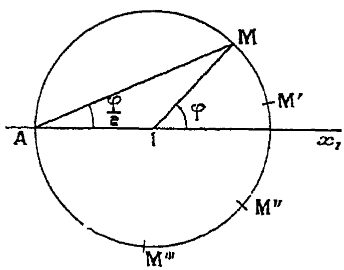
l'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{du}\,\frac{2dw}{1 + w^2} = 2A\,\frac{2w}{1 + w^2} - 2B\,\frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \qquad \left(2A = \frac{a'}{R},\ 2B = +\frac{b'}{R}\right),$$

ou :

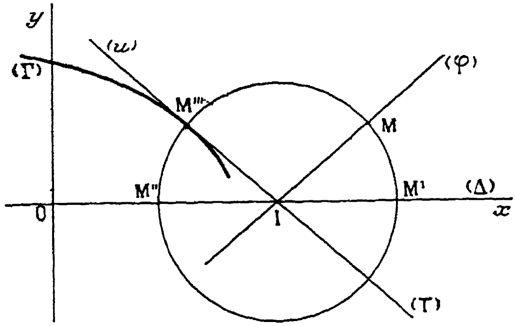
$$\frac{dw}{du} = Bw^2 + 2Aw - B.$$

C'est une équation de Riccati. Le rapport anharmonique de quatre intégrales w est constant. Pour interpréter ce résultat, imaginons l'un des cercles de la famille. Soit M le point où il est coupé par une des trajectoires orthogonales : $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ est le coefficient angulaire de la droite AM (v. figure). Si on considère quatre trajectoires orthogonales coupant le cercle aux points M, M′, M″, M‴, les quatre valeurs de w correspondantes sont les coefficients angulaires des quatre droites AM, AM′, AM″, AM‴, et le rapport anharmonique des quatre intégrales w est le rapport anharmonique du faisceau (A, M, M′, M″, M‴), c'est-à-dire le rapport anharmonique (M, M′, M″, M‴) des quatre points sur le cercle. Il en résulte que *quatre trajectoires orthogonales d'une famille de cercles coupent tous les cercles de la famille suivant le même rapport anharmonique.*



Dans le cas particulier où les cercles ont leurs centres sur une droite (δ), les points M′, M″ d'intersection du cercle avec (δ) correspondent à deux trajectoires orthogonales ; on connaît donc deux intégrales de l'équation de Riccati, et la détermination des trajectoires orthogonales se ramène à une quadrature. Pour définir la famille, au lieu de se donner a, b, R en fonction d'un paramètre, on peut se don-

ner une trajectoire orthogonale (Γ) : on connaît alors trois intégrales de l'équation de Riccati, et l'intégrale générale s'obtiendra en écrivant que son rapport anharmonique avec les trois intégrales connues est constant.



Supposons que (δ) soit l'axe ox, et donnons nous (Γ) par ses tangentes (T). L'une d'elles est définie par les équations :

$$x = a + \rho \cos u, \quad y = \rho \sin u,$$

a étant une fonction donnée de u. Pour déterminer le ρ du point de contact M''' avec (Γ), il suffit, suivant les principes de la théorie des enveloppes, de différentier en considérant x et y comme constants, ce qui donne :

$$da - \rho \sin u\, du + \cos u\, d\rho = 0, \quad \rho \cos u\, du + \sin u\, d\rho = 0,$$

d'où :

$$\rho = \frac{da}{du} \sin u = \mathrm{R}.$$

Cette formule donne le rayon $\mathrm{R} = \mathrm{IM}'''$ du cercle de la famille dont le centre a pour coordonnées $x = a$, $y = 0$. Une trajectoire orthogonale quelconque est donc représentée, d'après ce qui précède, par :

(4) $$x = a + \frac{da}{du} \sin u . \cos \varphi, \quad y = \frac{du}{du} \sin u . \sin \varphi,$$

l'angle φ étant lié à u par la constance du rapport anharmonique (M, M', M'', M'''), qui s'exprime par la formule :

(5) $$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = m . \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad (m = \text{const}^{\text{te}}).$$

Revenons maintenant aux surfaces de Joachimsthal.

Si on fait tourner la courbe (4) d'un angle v autour de ox, et si on pose :

$$a = f(u), \quad \frac{da}{du} = f'(u),$$

on obtiendra, pour une trajectoire orthogonale quelconque de la famille de sphères ayant pour grands cercles les cercles considérés, les équations :

$$(6) \qquad \begin{cases} x = f(u) + f'(u) \sin u \cos \varphi, \\ y = f'(u) \sin u \sin \varphi \cos v, \\ z = f'(u) \sin u \sin \varphi \sin v, \end{cases}$$

où φ est toujours lié à u par la formule (5). D'après le mode de génération obtenu, ces formules représentent l'une quelconque des surfaces orthogonales aux sphères considérées, à condition d'y considérer m comme une fonction $m = g(v)$, qui peut être arbitrairement choisie. On supposera donc sin φ et cos φ remplacés, dans les équations (6), par leurs expressions en fonction de :

$$(7) \qquad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = g(v) . \operatorname{tg} \frac{u}{2} ;$$

et, en y considérant u et v comme des paramètres arbitraires, elles représenteront la surface de Joachimsthal la plus générale.

Détermination des développables d'une congruence

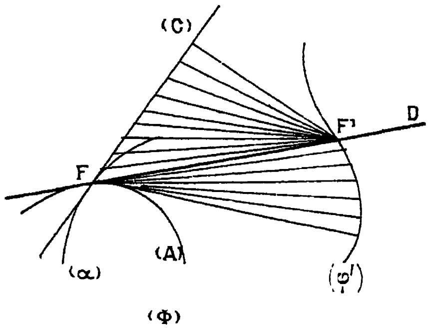
5. — Nous avons vu que la détermination des développables d'une congruence dépend de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et du deuxième degré. Cette intégration peut se simplifier dans certains cas.

On obtient les développables sans quadrature si la congruence admet deux courbes focales, ou corrélativement deux développables focales. Dans le premier cas, on obtient des cônes, et dans le second, des plans tangents, comme on l'a vu précédemment.

Si la congruence admet une courbe focale, ou corrélativement une développable focale, on a immédiatement une des familles de développables de la congruence ; pour avoir l'autre, on est ramené à intégrer une équation différentielle du premier ordre et du premier degré.

Cette équation a des propriétés particulières dans un cas corrélatif de lui-même, *cas où la congruence admet une courbe focale et une*

développable focale. Soit (α) l'arête de rebroussement de la développable focale (Φ) ; considérons une génératrice quelconque (C) de cette développable ; les droites de la congruence rencontrent la courbe focale (φ'), et sont dans les plans tangents à (Φ). Soit un plan tangent à (Φ), qui rencontre (φ') en F′ ; toutes les droites de ce plan qui passent par F′ sont des droites de la congruence. Considérons les développables de la congruence passant par une de ces droites (D) ; il y a d'abord le plan qui enveloppe la développable, et qui admet pour courbe de contact la génératrice (C). Les foyers de la droite (D) sont F′ sur (φ') et F sur (C). La deuxième développable a pour arête de rebroussement une courbe (A) de (Φ) dont les tangentes vont rencontrer (φ').



Le problème revient donc à *trouver les courbes d'une développable* (Φ) *dont les tangentes vont rencontrer une courbe* (φ').

Nous allons chercher directement les développables de la congruence, que nous définirons en partant de la courbe (φ'), et en associant à chacun de ses points un certain plan dans lequel seront toutes les droites de la congruence passant par ce point ; la développable (Φ) sera l'enveloppe de ce plan.

Soit la courbe (φ') :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v).$$

Pour définir un plan passant par un de ses points, il suffit de se donner deux directions $a_1(v)$, $b_1(v)$, $c_1(v)$ et $a_2(v)$, $b_2(v)$, $c_2(v)$. Ce plan contenant toutes les droites de la congruence, les coefficients directeurs d'une telle droite sont alors :

$$a = a_1 + w a_2, \qquad b = b_1 + w b_2, \qquad c = c_1 + w c_2.$$

L'équation différentielle des développables :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ df & dg & dh \\ da & db & dc \end{vmatrix} = 0,$$

devient ici, en désignant par des accents les dérivées par rapport à v,

$$dv \begin{vmatrix} a_1 + wa_2 & . & . \\ f'(v) & . & . \\ (a'_1 + wa'_2)dv + a_2dw & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

Nous trouvons $dv = 0$, $v = c^{te}$ ce qui nous donne les plans des droites de la congruence. L'autre solution s'obtiendra par l'intégration de l'équation,

$$dw \begin{vmatrix} a_1 & . & . \\ f' & . & . \\ a_2 & . & . \end{vmatrix} + dv \begin{vmatrix} a_1 + wa_2 & . & . \\ f' & . & . \\ a'_1 + wa'_2 & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

équation de la forme :

$$\frac{dw}{dv} = \mathrm{P}w^2 + \mathrm{Q}w + \mathrm{R},$$

où P, Q, R sont fonctions de v seul. C'est une équation de Riccati.

Indiquons quelques cas où on peut avoir des intégrales particulières de cette équation. Si la courbe (φ') est plane, et si on coupe (Φ) par son plan, la section est une courbe dont les tangentes rencontrent (φ'), c'est une courbe (A) ; on connaît une intégrale particulière, le problème s'achève au moyen de deux quadratures. En particulier si (φ') est le cercle imaginaire à l'infini, on doit déterminer sur (Φ) des courbes dont les tangentes rencontrent le cercle imaginaire à l'infini, ce sont les courbes minima. *La détermination des courbes minima d'une développable se ramène à deux quadratures.*

Corrélativement, si (Φ) est un cône, considérons le cône de même sommet et qui a pour base (φ') ; c'est une développable de la deuxième famille ; on connaît une intégrale particulière, et le problème s'achève encore par deux quadratures.

Si (Φ) est un cône et (φ') une courbe plane, on connaît deux intégrales particulières, et on est ramené à une seule quadrature.

Supposons encore que les plans qui enveloppent la développable (Φ) soient normaux à la courbe (φ'). Nous avons la *congruence des normales* à la courbe (φ'), et la recherche des développables conduira à celle des *développées* de (φ'). Le plan normal à (φ') en l'un

de ses points F′ est perpendiculaire à la tangente F″T. Si on considère le cône isotrope (J) de sommet F′, le plan normal est le plan polaire de la tangente par rapport à ce cône isotrope ; parmi les normales il y a donc les deux génératrices de contact des plans tangents menés par la tangente au cône isotrope. Soit (G) l'une d'elles, on l'obtient algébriquement ; considérons la surface réglée (R) qu'elle engendre lorsque F′ décrit la courbe (φ'). Le plan asymptote, plan tangent à l'infini sur (G), est le plan tangent au cône isotrope (J) le long de (G) ; la surface réglée contient la courbe (φ'), et le plan tangent au point F′ est le plan défini par (G) et F″T, qui est encore le plan tangent au cône isotrope le long de (G). Le plan tangent à R est donc le même en deux points de (G), et, par suite, est le même tout le long de (G) : cette droite engendre donc une surface développable. Ainsi *les droites isotropes des plans normaux à une courbe gauche engendrent deux développables et enveloppent deux développées de la courbe gauche.* Nous avons ainsi deux intégrales particulières, et la détermination des développées doit s'achever par une seule quadrature.

Effectivement, en supposant que v est l'arc s de (φ'), que a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 sont les cosinus directeurs α', β', γ' de la normale principale et $\alpha'', \beta'', \gamma''$ de la binormale, l'équation précédente devient, en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente,

$$dw \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + ds \begin{vmatrix} \alpha' + w\alpha'' & . & . \\ \alpha & . & . \\ -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T} + w\frac{\alpha'}{T} & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$-dw + \frac{ds}{T}(1 + w^2) = 0 ;$$

et donne la solution :

$$w = \operatorname{tg} \int \frac{ds}{T}.$$

Comme w n'est autre chose ici que la tangente de l'angle χ d'une normale avec la normale principale, la concordance avec la formule (1) du chapitre V, § 2, est manifeste.

On vérifie que l'équation différentielle en w admet les deux solutions : $w = \pm i$, qui correspondent aux développables isotropes.

Si on remarque de plus que la surface focale de la congruence des normales est la surface polaire de (φ'), c'est-à-dire que les points de

contact des normales avec les développées sont sur la droite polaire, on retrouve tous les résultats essentiels obtenus au chapitre V au sujet des développées des courbes gauches.

Propriétés infinitésimales métriques des congruences

6. — Nous allons faire l'étude d'une congruence quelconque, dans le voisinage d'une de ses droites, c'est-à-dire analyser les propriétés qui résultent de la considération simultanée de cette droite et des droites infiniment voisines appartenant aussi à la congruence. Cela revient à considérer les diverses surfaces réglées de la congruence (c'est-à-dire engendrées par des droites de la congruence) dont la droite considérée est une génératrice, et à étudier les plans tangents à ces surfaces réglées aux divers points de cette génératrice. La notion des foyers et des plans focaux est le point de départ de cette étude.

Soit (D) la droite considérée : prenons-la pour axe des z, et plaçons l'origine des coordonnées au milieu des deux foyers ; prenons enfin pour plans des xz et des yz les plans bissecteurs des plans focaux. Si la congruence est réelle, les foyers peuvent être, ainsi que les plans focaux, réels ou imaginaires conjugués, de sorte que le point milieu des foyers et les plans bissecteurs des plans focaux sont toujours réels.

Reprenons les notations du § 1, mais avec le choix suivant des données : le support de la congruence passera en O et y sera normal à Oz ; les lignes coordonnées $w = 0$, $v = 0$ seront celles qui se croisent en O ; les variables v et w seront les longueurs d'arc de ces courbes, qui admettront, de plus, pour tangentes Ox et Oy. D'autre part, a, b, c seront, pour (D), des cosinus directeurs.

Cela étant, on aura, pour $v = w = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial w} = c = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial w} = a = b = 0 ;$$

et, par suite,

$$(1) \qquad df = dv, \qquad dg = dw, \qquad dh = 0.$$

De plus, on a, quels que soient v, w,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a\frac{\partial a}{\partial v} + b\frac{\partial b}{\partial v} + c\frac{\partial c}{\partial v} = 0, \qquad a\frac{\partial a}{\partial w} + b\frac{\partial b}{\partial w} + c\frac{\partial c}{\partial w} = 0 ;$$

et, par suite, pour $v = w = 0$, $\frac{\partial c}{\partial v}$ et $\frac{\partial c}{\partial w}$ sont nuls, et on a :

$$da = a'dv + a''dw, \qquad db = b'dv + b''dw, \qquad dc = 0. \tag{2}$$

en posant, pour abréger l'écriture :

$$a' = \frac{\partial a}{\partial v}, \quad a'' = \frac{\partial a}{\partial w}, \quad b' = \frac{\partial b}{\partial v}, \quad b'' = \frac{\partial b}{\partial w}. \quad (\text{pour } v = w = 0). \tag{3}$$

Comme nous nous bornons aux propriétés infinitésimales du premier ordre, la surface réglée (R) quelconque, passant par (D), et dont les génératrices appartiennent à la congruence, que nous allons considérer, n'interviendra que par la direction de la tangente OT à sa trace sur le plan xOy : nous poserons :

$$(Ox, \text{OT}) = \varphi,$$

de sorte qu'un déplacement infiniment petit sur cette trace sera :

$$dx = \cos\varphi . ds, \qquad dy = \sin\varphi . ds, \qquad dz = 0.$$

Si donc on a égard aux formules (1), on voit que la génératrice de (R), infiniment voisine de (D), que nous avons à introduire, s'obtient en donnant à v et w les accroissements infiniment petits :

$$dv = \cos\varphi . ds, \qquad dw = \sin\varphi . ds. \tag{4}$$

Le plan tangent à (R), au point M de (D) qui a pour cote $z = u$, sera défini par l'angle $\theta = (Ox, \text{OP})$ qu'il fait avec le plan zOx, OP étant la trace de ce plan sur le plan xOy ; son équation sera :

$$x \sin\theta - y \cos\theta = 0. \tag{5}$$

Pour calculer l'angle θ, il suffit d'écrire que ce plan contient la tangente à la courbe $u =$ constante qui passe en M, tangente dont les coefficients de direction sont :

$$dx = df + uda, \qquad dy = dg + udb, \qquad dz = 0.$$

En tenant compte des formules (1), (2) et (4), on obtient ainsi :

$$[\cos\varphi + (a'\cos\varphi + a''\sin\varphi)u] \sin\theta -$$
$$- [\sin\varphi + (b'\cos\varphi + b''\sin\varphi)u] \cos\theta = 0,$$

ou :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b'u + (1 + b''u)\operatorname{tg}\varphi}{(1 + a'u) + a''u . \operatorname{tg}\varphi}. \tag{6}$$

En écrivant que le second membre ne dépend pas de $\operatorname{tg}\varphi$, on obtient l'équation aux cotes des *foyers* :

$$(7) \qquad (1 + a'u)(1 + b''u) - b'a''.u^2 = 0.$$

L'origine étant au milieu des foyers, la somme des racines est nulle :

$$a' + b'' = 0.$$

De plus, les valeurs de $\operatorname{tg}\theta$, qui correspondent aux deux racines u et $-u$, c'est-à-dire qui donnent les *plans focaux*, sont :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\pm b'u}{1 \pm a'u};$$

et comme elles doivent, d'après le choix des plans coordonnés, être égales et de signes contraires, a' est nul. On a donc :

$$(8) \qquad a' = b'' = 0.$$

Nous poserons :

$$(9) \qquad a'' = \frac{1}{p}, \qquad b' = \frac{1}{q}.$$

L'équation aux foyers (7) se réduira donc à :

$$(10) \qquad u^2 = pq,$$

et les plans focaux seront définis, en même temps, par :

$$(11) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{u}{q} = \frac{p}{u}, \qquad \operatorname{tg}^2\theta = \frac{p}{q}.$$

L'équation (6), donnant la loi de la variation simultanée des éléments géométriques associés θ, u et φ, devient enfin la *formule fondamentale* :

$$(12) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{p}{q} \cdot \frac{u + q\operatorname{tg}\varphi}{p + u\operatorname{tg}\varphi}.$$

La correspondance entre deux quelconques des trois éléments $\operatorname{tg}\varphi$, u, $\operatorname{tg}\theta$ est homographique, le troisième étant supposé constant. On voit, en particulier, que, en un point M de (D) donné, le plan tangent à (R) tourne, quand (R) varie, dans le même sens que le plan tangent au point milieu O, ou en sens contraire, suivant que $pq(pq - u^2)$ est positif ou négatif. Si donc les foyers sont imaginaires ($pq < 0$), les deux rotations sont toujours de même sens; si les foyers sont réels ($pq > 0$), elles sont de même sens quand M est entre les foyers, de sens contraire si M n'est pas entre les foyers.

Remarquons encore que l'équation (12) peut s'écrire :

$$(13) \cdot \quad u = pq \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi}{p - q \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi}, \quad \text{ou} \quad (13') \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{q} \cdot \frac{-u + q \operatorname{tg} \theta}{p - u \operatorname{tg} \theta},$$

ce qui met en évidence une loi de réciprocité entre θ et φ, au signe près de u.

Points limites et Plans principaux

Cherchons encore le point central de la génératrice (D) de (R). Si on suppose u infini, la formule (12) donne, pour le plan asymptote :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{p}{q \operatorname{tg} \varphi};$$

on a donc, pour le *plan central* :

$$(14) \qquad \operatorname{tg} \theta = - \frac{q \operatorname{tg} \varphi}{p},$$

et cette valeur, portée dans (13), donne, pour le *point central* :

$$(15) \qquad u = - pq(p + q) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{p^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{p + q}{2} \cdot \sin 2\theta.$$

La cote du point central est donc toujours finie, et ses valeurs extrêmes, qui correspondent à :

$$\theta = \pm \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{p}{q},$$

sont :

$$(16) \qquad u = \pm \frac{p + q}{2}.$$

On appelle *points-limites* ces positions extrêmes du point central : elles sont toujours réelles, ainsi que les plans centraux correspondants, qu'on appelle *plans principaux* du rayon : ceux-ci sont rectangulaires, et ont mêmes plans bissecteurs que les plans focaux (Hamilton).

Si les foyers sont réels, leur demi-distance, qui est la moyenne géométrique de $|p|$ et $|q|$, est moindre que celle des points limites, qui en est la moyenne arithmétique : les foyers sont donc entre les points-limites, et les deux couples de points ont le même centre, qui est dit le *centre du rayon*.

Si on désigne par $2d$ et 2δ les distances des foyers et des points limites, les formules (10) et (17) donnent l'interprétation géométrique des quantités p et q :

$$(17) \qquad d^2 = pq, \qquad 2\delta = |p + q|.$$

D'après les formules (11), l'angle 2ϖ des plans focaux est donné, en même temps, par les formules :

$$(17') \qquad \operatorname{tg} \varpi = \frac{d}{q} = \frac{p}{d}, \qquad \operatorname{tg}^2 \varpi = \frac{p}{q}.$$

Remarque. — Nous verrons, au chapitre suivant, que *dans toute congruence formée des normales à une surface, les foyers sont les centres de courbure principaux, et les plans focaux sont les plans de sections principales de la surface.* Ces plans focaux sont donc rectangulaires, et se confondent dès lors avec les plans principaux du rayon, que l'on vient de définir. De plus, l'orthogonalité des plans focaux s'exprime, d'après la formule (11), par la condition :

$$\frac{d}{q} \cdot \frac{-d}{q} = \frac{p}{d} \cdot \frac{d}{-p} = 1 ;$$

on a donc, en ayant égard à (17) :

$$d^2 = p^2 = q^2 = pq ; \qquad p = q = \pm d, \qquad d = \delta.$$

d'où :

$$p = q = \pm d, \qquad d = \delta.$$

Donc *dans une congruence de normales, les points-limites de chaque rayon se confondent avec ses foyers, et les plans focaux se confondent avec les plans principaux du rayon* Les mêmes circonstances se produisent. dans une congruence quelconque, pour les rayons qui satisfont à la condition $p = q$, c'est-à-dire dont les plans focaux sont rectangulaires.

Etude de la déviation

Considérons maintenant deux points quelconques M et M' de la droite (D), et cherchons la relation qui existe entre la cote relative $u' - u = \rho$ de ces deux points, et la *déviation* que subit le plan tangent à (R), quand on passe de l'un à l'autre, c'est-à-dire l'angle $\theta' - \theta = \psi$. Nous avons désigné par u' la cote de M', et par θ' l'angle

que le plan tangent en M′ fait avec le plan zOx, de sorte que l'on peut écrire, d'après (13′) :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{q} \cdot \frac{-u' + q \operatorname{tg} \theta'}{p - u' \operatorname{tg} \theta'} = \frac{p}{q} \cdot \frac{-u + q \operatorname{tg} \theta}{p - u \operatorname{tg} \theta} .$$

On en conclut :

$$(u' - u)(p - q \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta') + (uu' - pq)(\operatorname{tg} \theta' - \operatorname{tg} \theta) = 0,$$

ou :

$$\rho (p \cos \theta \cos \theta' - q \sin \theta \sin \theta' + u \sin \psi) + (u^2 - pq) \sin \psi = 0,$$

qui s'écrit encore :

$$(18)\quad \rho \left[\frac{p-q}{2} \cos \psi + \frac{p+q}{2} \cos(\psi + 2\theta) + u \sin \psi \right] = (pq - u^2) \sin \psi.$$

Si on se donne la déviation ψ, et si on fait varier (R), c'est-à-dire θ, en laissant fixe le point M, c'est-à-dire u, on voit que ρ a un maximum et un minimum donnés par :

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho_1 \left[\frac{p-q}{2} \cos \psi + \frac{p+q}{2} + u \sin \psi \right] &= (pq - u^2) \sin \psi, \\ \rho_2 \left[\frac{p-q}{2} \cos \psi - \frac{p+q}{2} + u \sin \psi \right] &= (pq - u^2) \sin \psi. \end{aligned} \right.$$

On tire de là :

$$\frac{p-q}{2} \cos \psi + u \sin \psi = \frac{1}{2} (pq - u^2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \sin \psi,$$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2} (pq - u^2) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \sin \psi ;$$

ce qui permet d'écrire la formule (18) sous la forme :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos (\psi + 2\theta) = \frac{1}{\rho} ,$$

d'où l'on conclut la *formule de Kummer :*

$$(20)\quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \left(\frac{\psi}{2} + \theta \right)}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \left(\frac{\psi}{2} + \theta \right)}{\rho_2} .$$

Dans le cas particulier où la déviation ψ est supposée égale à $\frac{\pi}{2}$, elle se réduit à :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\rho_1} + \frac{\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2},$$

qu'on écrit plus élégamment, en introduisant l'angle $\theta + \frac{\pi}{4} = \theta_0$ que le plan tangent en M fait avec l'un des plans principaux du rayon :

$$(21) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\theta_0}{\rho_1} + \frac{\sin^2\theta_0}{\rho_2}.$$

Cette *formule d'Hamilton* a la même forme que la formule d'Euler (page 41) relative à la variation de la courbure normale, et conduirait à des conséquences analogues. La formule d'Euler est, en fait, un cas particulier de celle d'Hamilton. Supposons, en effet, que la congruence considérée soit la congruence des normales à une surface (S), et que M soit un point de cette surface. Soit (G) la trace de la surface réglée (R) sur la surface (S) : l'angle θ_0 est précisément l'angle de la tangente à (C) en M avec l'un des plans principaux du rayon, c'est-à-dire d'après la remarque du paragraphe précédent, avec l'une des directions principales de la surface. D'autre part, la surface (R) n'est autre que la surface (Σ_u) considérée dans la remarque qui termine le chapitre V ; de sorte que le point M′, pour lequel le plan tangent à (R) est perpendiculaire au plan tangent à (R) en M, c'est-à-dire est normal à (G), est le centre K de courbure normale de (C). La formule (21) exprime donc bien, dans le cas particulier supposé, la courbure normale $\frac{1}{\rho}$ de la courbe (C) de (S), en fonction des courbures principales $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ de (S) et de l'angle θ_0 de (C) avec l'une des directions principales de la surface.

Paramètre de distribution. — Supposons, dans la formule générale de la déviation (18), que M est le point central de (D) sur (R), c'est-à-dire que u est donné par (15). Nous obtenons alors :

$$(22) \quad pq - u^2 = pq - (p+q)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta = \\ = (p\cos^2\theta - q\sin^2\theta)(q\cos^2\theta - p\sin^2\theta) ;$$

et la formule (18) devient :

$$\rho\left[\frac{p-q}{2}\cos\psi + \frac{p+q}{2}\cos\psi\cos 2\theta\right] = \\ = (p\cos^2\theta - q\sin^2\theta)(q\cos^2\theta - p\sin^2\theta)\sin\psi ;$$

c'est-à-dire, après division par le facteur $(p\cos^2\theta - q\sin^2\theta)$:

$$(23) \qquad 0 = (q\cos^2\theta - p\sin^2\theta).\operatorname{tg}\psi.$$

Nous obtenons ainsi la formule de Chasles (page 102), et le paramètre de distribution de (D), pour chaque surface (R), est donné par l'équation :

$$(24) \qquad K = q \cos^2 \theta - p \sin^2 \theta = \frac{p+q}{2} \cos 2\theta - \frac{p-q}{2}$$

en fonction de l'angle θ du plan central avec le plan zOx. Le point central est donné, en même temps, par la formule (15) :

$$(15) \qquad u = \frac{p+q}{2} . \sin 2\theta.$$

On voit que q et $-p$ sont les valeurs extrêmes du paramètre de distribution : elles correspondent aux deux cas où le point central est au centre du rayon ; les plans centraux sont alors les plans de coordonnées, c'est-à-dire les plans bissecteurs des plans focaux et des plans principaux.

Le paramètre de distribution s'annule, quand le plan central devient perpendiculaire à l'un des plans focaux : le point central tend alors vers le foyer qui correspond à l'autre plan focal.

Propriétés des pinceaux de rayons

7. — *Densité en un point.* — Imaginons une surface réglée (Σ) de la congruence, contenant à son intérieur un rayon (D) de la congruence : la section de cette surface réglée par le plan perpendiculaire à (D) en un point quelconque de cette droite est une courbe fermée (σ), qui contient M à son intérieur. Considérons tous ses points comme situés à une distance de M infiniment petite : l'ensemble des rayons de la congruence contenus à l'intérieur de (Σ) sera dit alors un *pinceau de rayons, infiniment délié*, ayant le rayon (D) pour *axe ;* les sections, telles que (σ), seront les *sections droites du pinceau.*

La propriété fondamentale de ces pinceaux résulte de l'interprétation du produit $u_1 u_2$ des racines de l'équation (5) du § 1, qui détermine les foyers du rayon (D). Ce produit est :

$$u_1 u_2 = \frac{P}{\Pi}, \qquad P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix}, \qquad \Pi = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \\ \frac{\partial a}{\partial w} & \frac{\partial b}{\partial w} & \frac{\partial c}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Ecrivons-le, en désignant par dv, dw des infiniment petits positifs :

$$(1) \qquad u_1 u_2 = \frac{P dv.dw}{\Pi dv.dw}.$$

Le numérateur de cette formule se développe sous la forme :

$$(2) \quad P dv dw = a. \frac{D(g,h)}{D(v,w)}.dv dw + b. \frac{D(h,f)}{D(v,w)} dv dw + c \frac{D(f,g)}{D(v,w)} dv dw.$$

Or :

$$(3) \qquad \frac{D(g,h)}{D(v,w)} dv dw, \qquad \frac{D(h,f)}{D(v,w)} dv dw, \qquad \frac{D(f,g)}{D(v,w)} dv dw,$$

sont les trois composantes d'un vecteur, normal à la surface

$$(4) \qquad x = f(v, w), \qquad y = g(v, w), \qquad z = h(v, w),$$

au point (v, w) de cette surface, et dont la longueur mesure l'élément d'aire de la surface en ce point. Si donc on suppose que a, b, c soient les cosinus directeurs du rayon qui a son pied en ce point, la quantité (2), projection du vecteur (3) sur la direction a, b, c, est la projection de cet élément d'aire sur le plan perpendiculaire au rayon mené par le point considéré. Comme, de plus, le vecteur (3), et les directions positives :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}\right), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial w}, \frac{\partial h}{\partial w}\right)$$

des courbes coordonnées au point considéré forment un trièdre direct, cette projection est positive si la direction a, b, c et les directions positives précédentes forment aussi un trièdre direct.

Si nous supposons que le support (4) soit normal au rayon, et que son pied soit le point M du rayon (D) précédemment considéré, cette projection de l'élément d'aire se réduit à l'élément d'aire lui-même, c'est-à-dire, à des infiniment petits près d'ordre supérieur, à l'aire de la section droite (σ) du pinceau, avec la même convention de signe.

Appliquons au dénominateur de la formule (1) les mêmes considérations : le support (4) est remplacé par une sphère de rayon (1), qui est aussi normale à (D) au point (v, w). Ce dénominateur $\Pi dv dw$ mesure donc, avec une convention de signe toute semblable, l'aire sphérique élémentaire homologue de (σ), c'est-à-dire l'angle solide élémentaire que remplissent les directions des rayons qui constituent le pinceau, supposées issues d'un même point : c'est ce qu'on peut appeler la mesure de l'angle solide du pinceau.

On voit, de plus, que le rapport (1) sera positif ou négatif suivant que les points homologues des contours de la section droite (σ) et de

l'aire sphérique qui lui correspond, décriront ces deux contours, par rapport à la direction positive de l'axe du pinceau, dans le même sens ou dans des sens opposés, lorsque l'on fera décrire à un rayon mobile la surface réglée (Σ) qui limite le pinceau.

Donc *le produit des mesures algébriques des distances d'un point* M *d'un rayon quelconque d'une congruence aux deux foyers de ce rayon est égal au quotient de l'aire de la section droite faite en* M *dans un pinceau infiniment délié ayant ce rayon pour axe par la mesure de l'angle solide de ce pinceau*, ce rapport ayant le signe qui vient d'être précisé (Kummer). Cela équivaut à dire que c'est la limite vers laquelle tend le rapport analogue relatif à un pinceau de section droite finie, lorsque cette section droite tend vers zéro dans toutes ses dimensions, sans que le pinceau cesse de contenir à son intérieur le rayon considéré. On prend l'inverse de cette limite, qui ne dépend pas de la manière dont le pinceau se réduit à son axe, comme mesure de la *densité du pinceau* infiniment délié au point M.

Donc *la densité d'un pinceau de la congruence, infiniment délié, en un point quelconque de son axe, a pour mesure l'inverse du produit des distances algébriques de ce point aux foyers de cet axe.*

Ce théorème se réduit, pour la congruence des normales à une surface (S), au théorème de Gauss sur la courbure totale (Cf. page 69). Cela résulte des remarques suivantes : si on prend pour M le pied d'une normale sur (S), les distances algébriques de M aux foyers de cette normale, qui sont les centres de courbure principaux de la surface (§ 5), deviennent les rayons de courbure principaux de (S) en M. On peut, de plus, considérer alors (S) comme support de la congruence, et, comme cette surface est normale en M au rayon (D) considéré, son aire élémentaire en M est égale à la section droite d'un pinceau, infiniment délié, d'axe (D). Enfin, la correspondance établie par les directions des rayons entre le support (S) et une sphère de rayon 1, est ici la représentation sphérique de (S) : l'angle solide du pinceau est donc l'aire élémentaire de la sphère qui est homologue à l'aire élémentaire de la surface (S) dans sa représentation sphérique.

Etude des sections droites. — Si on imagine deux sections droites d'un même pinceau infiniment délié, d'axe (D), le rapport de leurs aires σ et σ' est égal au rapport inverse des densités aux points M, M' de (D) où sont faites ces deux sections. Si donc r_1, r_2 ; r'_1, r'_2 sont les distances de M et M', respectivement, aux deux foyers, on a, pour le rapport des aires :

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2}. \tag{5}$$

Ce rapport tend donc vers zéro, si, M restant fixe, M′ vient en un foyer. Le pinceau s'aplatit donc en ses deux foyers, de manière que l'aire des sections droites correspondantes soit d'ordre infinitésimal supérieur à celui des autres sections droites.

Nous pourrons préciser davantage au moyen des formules du § 6. Supposons le pinceau donné par la section droite faite au *centre* du rayon : c'est, d'après le choix des axes de coordonnées, la section faite par le plan des xy. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, les coordonnées d'un point du contour de cette section sont :

$$(6) \qquad x = dv, \qquad y = dw, \qquad z = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque du rayon de la congruence passant en ce point sont :

$$x = f(v + dv, w + dw) + u.a(v + dv, w + dw), \quad y = \ldots, \quad z = \ldots,$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, et tenant compte des formules (1), (2), (8), (9) du § 6,

$$(7) \qquad x = dv + u\frac{dw}{p}, \qquad y = u\frac{dv}{q} + dw, \qquad z = u.$$

Si donc on considère u comme constant, les formules (6) et (7) expriment la correspondance établie par les rayons de la congruence entre les points du plan $z = 0$, et ceux du plan $z = u$. Réservant les lettres x, y pour les premiers, et désignant les seconds par X, Y, cette correspondance est donc définie par les formules :

$$(8) \qquad \mathrm{X} = x + \frac{u}{p}y, \qquad \mathrm{Y} = \frac{u}{q}x + y.$$

C'est une correspondance linéaire, qui devient singulière si le déterminant des coefficients de x et y est nul, c'est-à-dire pour :

$$u^2 - pq = 0.$$

Cette condition exprime [équ. (10) § 6] que la section $z = u$ est menée par un des foyers, F ; elle ne peut être réalisée que si les foyers sont réels.

Dans le cas où elle l'est, on a identiquement, quels que soient x et y :

$$\mathrm{Y} = \frac{a}{q}\mathrm{X},$$

ou [équ. (11), § 6], en désignant par θ l'angle du plan focal (P), associé au foyer F, avec le plan zOx,

$$Y = X \operatorname{tg} \theta.$$

Quelle que soit donc la forme de la section droite centrale, c'est-à-dire dont le plan passe par le centre du rayon, *le pinceau est coupé par le plan de section droite passant par un foyer suivant un segment rectiligne, situé dans le plan focal associé à ce foyer*. La surface extérieure du pinceau a donc, si on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au diamètre de la section droite centrale, l'aspect d'une surface réglée ayant deux directrices rectilignes, qui passent par les foyers de l'axe du pinceau, sont perpendiculaires à cet axe, et sont situés dans les plans focaux associés, respectivement, à ces foyers.

Supposons, par exemple, que la section droite centrale soit un cercle de rayon r ; la section par le plan de cote $z = u$ sera l'ellipse :

$$(9) \qquad \left(X - \frac{u}{p} Y\right)^2 + \left(Y - \frac{u}{q} X\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{u^2}{pq}\right)^2,$$

qui se réduit effectivement à une droite double, pour $u^2 = pq$, dans le cas où les foyers sont réels.

L'angle ω d'un axe de cette ellipse avec le plan zOx est donné par la formule :

$$(10) \qquad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{2pq}{q-p} \cdot \frac{1}{u}.$$

Dans le cas $p = q$ (c'est-à-dire dans le cas des congruences de normales, si cette circonstance se produit pour tous les rayons ; et, plus généralement, toutes les fois que les plans focaux sont rectangulaires), les axes sont donc toujours dans les plans focaux, confondus alors avec les plans principaux du rayon.

Ce cas écarté, si on projette la section sur le plan $z = 0$, on verra, lorsque la cote u du plan sécant varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'angle droit formé par les deux axes de la section tourner toujours dans le même sens : la rotation totale est de $\frac{\pi}{2}$, et lorsque la cote u tend vers zéro, ces axes tendent à se placer dans les plans principaux du rayon. Les deux ellipses fournies par deux plans équidistants du centre du rayon sont, du reste, en projection, symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox et par rapport à Oy.

Dans le cas des foyers réels, en ayant égard aux formules (17') du § 6, on met la formule (10) sous la forme :

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{d}{u} \cdot \operatorname{tg} 2\varpi,$$

où interviennent la demi-distance d des foyers, et l'angle 2ϖ des plans focaux.

Les longueurs l des axes de l'ellipse (9) sont données par l'équation :

$$(11)\qquad l^4 - \left[2 + u^2\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right)\right] r^2 l^2 + \left(1 - \frac{u^2}{pq}\right)^2 r^4 = 0;$$

et la loi de leur variation résulterait de l'étude de l'hyperbole représentée par l'équation qu'on en déduit en posant :

$$l^2 = r^2.y, \qquad u^2 = pq.x.$$

On verrait ainsi que si u varie de o à $\pm \infty$, l'un des axes croît constamment, tandis que l'autre décroît d'abord, passe par un minimum, et croît ensuite aussi constamment : les deux axes deviennent infinis avec la cote u.

Si les foyers sont réels ($pq > 0$), le minimum du deuxième axe est zéro, et il a lieu, conformément à ce qu'on a vu, lorsque le plan de section vient en un foyer ; le premier axe, situé alors dans le plan focal correspondant, a pour longueur :

$$2l = \frac{4R}{\sin 2\varpi}.$$

On peut donc dire que le pinceau s'étale le long de ses directrices rectilignes sur une longueur supérieure en général au double de son diamètre central, et égale au double de ce diamètre dans le cas où les plans focaux sont rectangulaires.

Remarque. — Le cas où les foyers sont confondus, sur le rayon considéré, se traitera en laissant l'origine O arbitraire sur ce rayon ; on supposera seulement que le plan zOx est le plan focal double. Alors, h étant la cote du foyer double, et les autres hypothèses sur le choix des axes, faites au § 6, étant maintenues, la correspondance entre le plan $z = 0$ et le plan de cote u s'exprimera par les formules :

$$X = \left(1 - \frac{u}{h}\right)x + \frac{u}{k}y, \qquad Y = \left(1 - \frac{u}{h}\right)y,$$

en posant ici :

$$h = -\frac{1}{a'}, \qquad k = \frac{1}{a''}.$$

En écrivant, en effet, que les racines de l'équation (7) sont égales à h, et que la formule (6) donne, pour $u = h$, la valeur o, on obtient :

$$a' = b'' = -\frac{1}{h}, \qquad b' = 0.$$

On voit que, si on se donne arbitrairement la section (6) du pinceau, dans le plan $z = 0$, qui est ici un plan de section droite arbitraire, la section par le plan $z = h$, qui passe au foyer, est seule rectiligne : elle est encore dans le plan focal, et sa longueur est proportionnelle à la dimension de la section (6) perpendiculaire à ce plan focal.

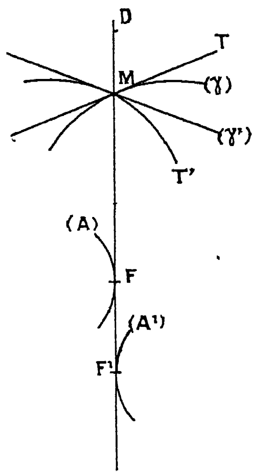
L'hypothèse $a'' = 0$, implicitement écartée, correspond au cas où le plan focal serait indéterminé : la section droite du pinceau, par un plan passant le foyer, se réduirait alors à un point.

CHAPITRE VII

CONGRUENCES DE NORMALES

Propriété caractéristique des congruences de normales

1\. — Considérons une surface, les coordonnées d'un de ses points dépendent de deux paramètres ; l'ensemble des normales à cette surface dépend de deux paramètres, et constitue une congruence. Pour obtenir les développables de cette congruence, il suffit de considérer sur la surface les deux familles de lignes de courbure, puisque les normales à une surface en tous les points d'une ligne de courbure engendrent une surface développable. Le plan tangent à cette développable passe par la normale (D) et par la tangente à la ligne de courbure correspondante. C'est l'un des plans focaux de la droite (D). Ainsi *les plans focaux sont les plans des sections principales de la surface. Les plans focaux d'une congruence de normales sont rectangulaires.* Il en résulte qu'une congruence quelconque n'est pas en général constituée par les normales à une surface.



Considérons les deux lignes de courbure (γ) (γ') qui passent par un point M de la surface ; à la développable de (γ) correspond une arête de rebroussement (A) dont le plan osculateur est le plan focal, le point de contact F de (A) et de la droite D est un des points focaux. L'arête de rebroussement (A) est l'enveloppe de la droite (D) quand le point M se déplace sur la courbe (γ) ; le point F est alors l'un des centres de courbure principaux de la surface au point M. Le plan focal associé est le deuxième plan de section principale FMT'. On aura de même une deuxième arête de rebroussement (A') en considérant la courbe (γ').

On verra facilement que ces propriétés des centres de courbure

principaux et des plans de sections principales subsistent, quelle que soit la nature des multiplicités focales de la congruence considérée.

Réciproquement, soit une congruence constituée par les droites (D) :

$$x = f(v, w) + u.a(v, w),\ y = g(v, w) + u.b(v, w),\ z = h(v, w) + u.c(v, w).$$

Cherchons à quelles conditions on peut choisir sur chaque droite (D) un point M dont le lieu soit une surface constamment normale à (D). Il faut et il suffit pour cela que l'on puisse déterminer u en fonction de v, w de façon que :

$$\Sigma a dx = 0,$$

ou :

$$\Sigma a(df + u da + a du) = 0.$$

Supposons que a, b, c soient les cosinus directeurs ; alors u représente la distance du point P, où la droite rencontre le support, au point M, et on a :

$$\Sigma a^2 = 1, \qquad \Sigma a da = 0.$$

La condition précédente devient, par suite :

$$du + \Sigma a df = 0 ;$$

ou :

(1) $$- du = \Sigma a df.$$

Cette équation exprime que $\Sigma a df$ est une différentielle totale exacte ; or :

$$\Sigma a df = \Sigma a \frac{\partial f}{\partial v} dv + \Sigma a \frac{\partial f}{\partial w} dw ;$$

la condition est donc :

$$\frac{\partial}{\partial w} \Sigma a \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \Sigma a \frac{\partial f}{\partial w},$$

ou :

$$\Sigma \frac{\partial a}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial a}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial w},$$

ou enfin :

(2) $$\Sigma \left(\frac{\partial a}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \right) = 0.$$

Nous trouvons une condition unique. Or nous avons trouvé précédemment comme condition nécessaire l'orthogonalité des plans focaux. Nous sommes donc conduits à comparer les deux conditions. Les coefficients directeurs A, B, C d'un plan focal vérifient les relations :

$$(3) \qquad Aa + Bb + Cc = 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} & A\left(\frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial a}{\partial v}\right) + B\left(\frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial b}{\partial v}\right) + C\left(\frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial c}{\partial v}\right) = 0, \\ & A\left(\frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial a}{\partial w}\right) + B\left(\frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial b}{\partial w}\right) + C\left(\frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial c}{\partial w}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Eliminant u entre les deux dernières équations, nous obtenons :

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma A\frac{\partial f}{\partial v} & \Sigma A\frac{\partial a}{\partial v} \\ \Sigma A\frac{\partial f}{\partial w} & \Sigma A\frac{\partial a}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de direction des normales aux plans focaux sont définis par (3) et (4) Si nous considérons A, B, C comme coordonnées courantes, (3) représente un plan passant par l'origine, (4) un cône ayant pour sommet l'origine ; et les génératrices d'intersection sont précisément les normales cherchées. Exprimons que ces deux droites sont rectangulaires ; le plan (3) est perpendiculaire à la droite (a, b, c), qui est sur le cône (4), car des conditions $\Sigma a^2 = 1$ et $\Sigma a da = 0$, on déduit :

$$\Sigma a\frac{\partial a}{\partial v} = 0, \qquad \Sigma a\frac{\partial a}{\partial w} = 0 ;$$

donc les deux normales sont perpendiculaires à la droite (a, b, c) ; s elles sont rectangulaires, c'est que le cône (4) est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, ce qui donne la condition :

$$\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial a}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial a}{\partial v}\right) = 0 ;$$

c'est précisément la condition (2). Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit une congruence de normales, c'est que les plans focaux de chaque rayon soient rectangulaires.*

Supposons satisfaite la condition (2). Pour obtenir une surface normale à toutes les droites de la congruence, il suffit de calculer u en fonction de v, w, ce qui se fait par l'équation (1) : elle est, par hypothèse, de la forme

$$du = d\Phi(v.w),$$

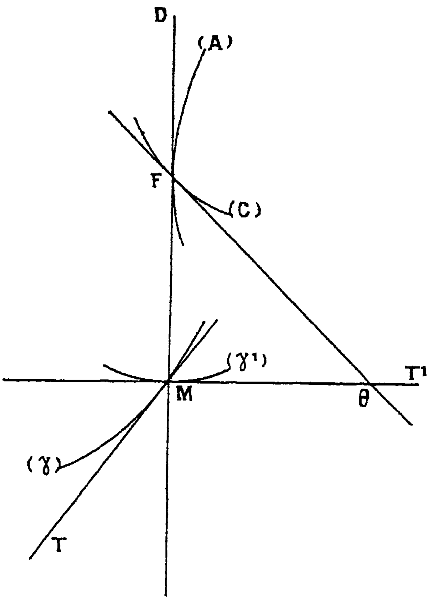
d'où :

$$(5) \qquad u = \Phi(v.w) + c^{te}.$$

Il y a donc une infinité de surfaces répondant à la question ; si deux points M et M′ de (D) décrivent respectivement deux de ces surfaces, (S) et (S′), correspondant à deux fonctions, $u = \text{PM}$, $u' = \text{PM}'$, données par la formule (5), la distance $\text{MM}' = u' - u$ sera une quantité constante. Les surfaces (S), (S′) sont appelées *surfaces parallèles* et *une famille de surfaces parallèles admet pour chaque normale mêmes centres de courbure principaux et mêmes multiplicités focales ;* ces multiplicités focales constituent la *développée* de l'une quelconque de ces surfaces.

Relations entre une surface et sa développée

2. — Considérons une nappe de la développée d'une surface (S). Supposons d'abord que ce soit une surface (Φ). Considérons une droite (D) de la congruence des normales à (S) ; cette droite est tangente en F à l'arête de rebroussement (A) qui appartient à (Φ) ; les plans focaux associés à (D) sont le plan osculateur à (A) et le plan tangent à (Φ). Pour que la congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que le plan osculateur à (A) soit normal à (Φ), donc que (A) soit une géodésique de (Φ). *La congruence des normales à la surface* (S) *est constituée par les tangentes à une famille de géodésiques de sa développée* (Φ). *Et réciproquement les tangentes à une famille de* ∞^1 *géodésiques d'une surface quelconque* (Φ) *constituent une congruence de normales.*



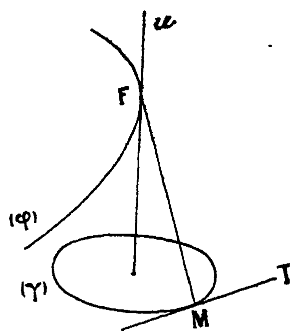
Soit M le point où la droite (D) coupe la surface (S) ; lorsque la droite (D) enveloppe l'arête de rebroussement (A), le point M décrit une ligne de courbure (γ) de (S). A chaque point M de (S) correspond un point F de (Φ) ; il y a correspondance point par point entre les deux surfaces ;

à la famille de lignes de courbure (γ) de (S) correspond une famille de géodésiques de (Φ).

Voyons maintenant les courbes de contact (C) de (Φ) ; considérons la tangente $F\theta$ à (C), c'est la caractéristique du plan tangent à (Φ) lorsque le point M décrit (γ) ; or ce plan tangent à (Φ) est le deuxième plan focal, c'est le plan perpendiculaire au plan FMT passant par FM, c'est donc le plan normal à (γ) au point M. Donc $F\theta$ est la caractéristique du plan normal à (γ), c'est la droite polaire de (γ). *Les courbes de contact de* (Φ) *sont les courbes tangentes aux droites polaires des différents points des courbes* (γ). $F\theta$ étant dans le plan normal à (γ) rencontre la tangente à la deuxième section principale ; elle passe au centre de courbure géodésique de (γ) sur (S).

Surface Canal

Supposons que l'une des nappes de la développée se réduise à une courbe (φ). La droite (D) rencontre (φ) en l'un des points focaux F. L'une des développables passant par (D) est un cône de sommet F ; l'une des lignes de courbure (γ) de (S) passant par M est située sur ce cône de sommet F. Or (γ) est constamment normale à D, c'est donc une trajectoire orthogonale des génératrices du cône ; c'est-à-dire l'intersection de ce cône avec une sphère de centre F. Cette sphère en chaque point M est normale à la droite (D) ; elle est donc tangente à la surface (S) tout le long de la courbe (γ). A chaque pont F de (φ) correspond une sphère ayant ce point pour centre et tangente à (S) tout le long de la ligne de courbure correspondante. Donc *une surface* (S), *dont une nappe de la développée est une courbe*, *est l'enveloppe d'une famille de sphères dépendant d'un paramètre*. Nous appellerons une telle surface une *surface canal* ; on réserve cependant quelquefois ce nom aux enveloppes de ∞^1 sphères égales. La réciproque de la proposition précédente est vraie, comme on le verra plus loin.



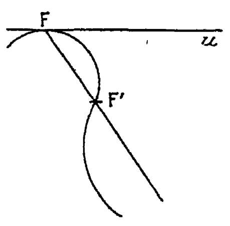
La courbe (γ) est alors l'intersection d'une sphère avec une sphère infiniment voisine ; c'est un cercle. Le cône F est de révolution, l'axe de ce cône est la position limite de la ligne des centres, c'est la tangente Fu à (φ). Considérons la tangente MT à (γ) : MT, tangente en un point du cercle, est orthogonale à Fu ; Fu est donc dans le second

plan de section principale. *Les congruences considérées sont donc formées des génératrices de ∞^1 cônes de révolution, dont les axes sont tangents à la courbe lieu des sommets de ces cônes.* Et *réciproquement toute congruence ainsi constituée est une congruence de normales*, car les plans focaux sont les plans tangents et les plans méridiens de ces cônes, et sont par conséquent rectangulaires.

Cyclide de Dupin

Voyons si les deux nappes de la développée peuvent se réduire à deux courbes (φ) et (φ'). Les développables de la congruence sont les cônes ayant leur sommet sur l'une des courbes et passant par l'autre. Tous les cônes (F) de révolution doivent passer par la courbe (φ'). Cette courbe (φ') est telle qu'il passe par cette courbe une infinité de cônes de révolution ; de même (φ). Donc (φ), (φ') ne peuvent être que des biquadratiques gauches ou leurs éléments de décomposition. Mais aucune de ces courbes ne peut être une biquadratique gauche, sans quoi par une d'elles passeraient quatre cônes du deuxième degré seulement.

Voyons si l'une d'elles peut être une cubique gauche ; les cônes du deuxième degré passant par une cubique gauche (φ') ont leurs sommets sur (φ) : les deux courbes (φ) et (φ') seraient donc confondues. Examinons alors s'il peut exister des cubiques gauches telles que les cônes du deuxième degré qui les contiennent soient de révolution.



Un tel cône aurait pour axe la tangente Fu ; or il contient cette tangente, donc il se décomposerait. Ainsi ni (φ), ni (φ'), ne peuvent être des cubiques gauches.

Supposons alors que (φ') soit une conique ; le lieu des sommets des cônes de révolution passant par cette conique est, comme l'on sait, une autre conique, qui est la focale de la première. Il y a réciprocité entre ces coniques, et les cônes de révolution ont pour axes les tangentes aux focales. Donc *les droites rencontrant deux coniques focales l'une de l'autre constituent une congruence de normales.* Les surfaces normales à ces droites s'appellent *Cyclides de Dupin*. *Leurs deux systèmes de lignes de courbure sont des cercles.*

Cas particuliers. — Supposons en particulier que (φ') soit un cercle ; alors le lieu des sommets des cônes de révolution passant par (φ') est l'axe (φ) de ce cercle, et nous voyons que *toutes les droites*

qui s'appuient sur un cercle (φ') *et sur son axe* (φ) *sont normales à une famille de surfaces.* Ces surfaces sont des *tores* de révolution autour de l'axe (φ), le lieu du centre du cercle méridien étant le cercle (φ').

Supposons que (φ') soit une droite : la surface est l'enveloppe d'une famille de sphères ayant leurs centres sur cette droite. C'est une surface de révolution autour de (φ') ; la première nappe de la développée est la droite (φ'), la deuxième est engendrée par la rotation de la développée de la méridienne principale ; pour que ce soit une courbe, il faut que la développée soit un point, donc que la méridienne soit un cercle, et nous retombons sur le cas du tore.

Cas singulier

Cherchons enfin si les deux nappes de la développée peuvent être confondues. S'il en est ainsi, les deux familles de lignes de courbure de la surface (S) sont confondues : c'est le cas des *surfaces réglées à génératrices isotropes.* Les deux nappes de la développée se réduisent, pour ces surfaces, à une seule courbe, comme on le verra au paragraphe suivant.

Etude des surfaces enveloppes de sphères

3. — Nous avons été amenés, en discutant la nature de la développée d'une surface, à considérer les surfaces enveloppes de sphères. L'étude de ces surfaces va nous conduire maintenant aux réciproques des propriétés précédentes.

Considérons une surface (S), enveloppe de ∞^1 sphères (Σ). Chaque sphère coupe la sphère infiniment voisine suivant un cercle, et les normales à (S) en tous les points de ce cercle passent par le centre de la sphère. Le lieu des centres des sphères est une courbe rencontrée par toutes les normales à (S), c'est une des nappes de la développée. D'autre part, la sphère (Σ) étant tangente à la surface (S) tout le long du cercle caractéristique, ce cercle est une ligne de courbure de la surface (S), d'après le Théorème de Joachimsthal. *Les surfaces enveloppes de sphères ont une famille de lignes de courbure circulaires. Réciproquement, toute surface ayant une famille de lignes de courbure circulaires est une enveloppe de sphères.* Considérons en effet une ligne de courbure circulaire (K) ; toute sphère passant par (K) coupe la surface (S) sous un angle constant, d'après le Théorème de

Joachimsthal. Or il existe une sphère passant par (K) et tangente à (S) en l'un des points de ce cercle ; cette sphère sera alors tangente à (S) en tous les points du cercle (K), et toute ligne de courbure circulaire est courbe de contact d'une sphère avec la surface. La surface est l'enveloppe des sphères ainsi déterminées.

Soit (a, b, c) le centre et r le rayon de l'une des ∞^1 sphères considérées : a, b, c, r sont des fonctions d'un même paramètre.

La sphère a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0 ;$$

la caractéristique est définie par cette équation et par l'équation

$$(x-a)da + (y-b)db + (z-c)dc + rdr = 0.$$

On vérifie bien que c'est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction da, db, dc, de la tangente au lieu des centres des sphères.

Nous venons de considérer les surfaces dont une famille de lignes de courbure est constituée par des cercles. Voyons si les deux familles de lignes de courbure peuvent être circulaires. La surface correspondante pourra être considérée de deux façons différentes comme l'enveloppe de ∞^1 sphères. Les deux nappes de la développée seront des courbes. La surface est donc une *Cyclide de Dupin* ; et ceci va nous fournir, pour l'étude de cette cyclide, un point de vue nouveau.

Correspondance entre les droites et les sphères

Les droites et les sphères sont des éléments géométriques qui dépendent de quatre paramètres. Ce fait seul permet de prévoir qu'il y aura une correspondance entre l'étude des systèmes de droites et celle des systèmes de sphères. Cette correspondance trouve son expression analytique dans une transformation, due à Sophus Lie, que nous exposerons plus tard. Mais nous la verrons se manifester auparavant dans diverses questions. C'est ainsi que l'on peut considérer dans la géométrie des sphères les enveloppes de ∞^1 sphères comme correspondant aux surfaces réglées, lieux de ∞^1 droites ; la cyclide de Dupin correspond alors aux surfaces doublement réglées, donc aux surfaces réglées du second degré. Nous allons voir l'analogie se développer dans l'étude qui suit.

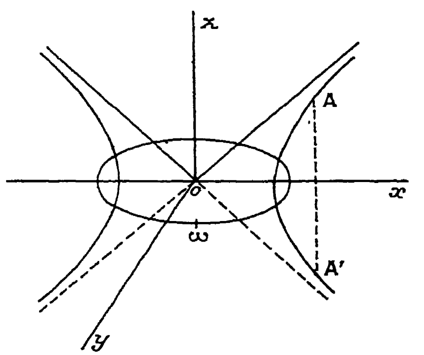
Soit (Σ) une sphère de la première famille, (Σ') une sphère de la deuxième famille, (Σ) touche (S) suivant un cercle (K), Σ' touche (S) suivant un cercle (K'). La surface (S) étant engendrée par le cercle (K)

ou par le cercle (K'), il en résulte que ces deux cercles ont au moins un point commun M ; soient O, O' les centres des sphères (Σ) (Σ'). OM et O'M sont normales aux sphères (Σ) (Σ') et par suite normales en M à la surface. Donc elles coïncident, O, M, O' sont sur une même droite ; les sphères (Σ) (Σ') sont tangentes en M. *Une sphère de l'une des familles est tangente à une sphère quelconque de l'autre famille* (A rapprocher de : Deux génératrices de systèmes différents d'une quadrique se rencontrent).

Considérons trois sphères fixes (Σ), (Σ_1), (Σ_2) d'une des familles. Elles sont tangentes à toutes les sphères de l'autre famille, et par suite la *surface est l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes.* (Une quadrique est le lieu d'une droite rencontrant trois droites fixes). Les trois sphères (Σ), (Σ_1), (Σ_2) se coupent en deux points qui peuvent être considérés comme des sphères de rayon nul tangentes à (Σ), (Σ_1), (Σ_2) ; donc il y a deux sphères de rayon nul dans chaque famille de sphères enveloppées par la cyclide. Les sphères de l'autre famille devant être tangentes à ces deux sphères de rayon nul passent par leurs centres. Ces deux points sont sur le lieu des centres des sphères, donc sur les coniques focales ; *si donc nous considérons les deux coniques focales, les sphères d'une des familles ont leurs centres sur l'une des coniques et passent par deux points fixes de l'autre, symétriques par rapport au plan de la première.* Il est alors facile, avec cette génération, de trouver l'équation de la cyclide.

Equation de la Cyclide de Dupin

1° Supposons d'abord que l'une des coniques soit une ellipse, par exemple : l'autre est une hyperbole. Prenons pour axes ox, oy les axes de l'ellipse, dont l'équation, dans son plan, est :



$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'hyperbole focale est dans le plan $y = 0$. Elle a pour équation, dans ce plan, .

$$(H) \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Un point ω de l'ellipse (E) a pour coordonnées :

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi, \qquad z = 0.$$

Soit, sur l'hyperbole (H), les points fixes A et A′ définis par les formules :

$$x_0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0^2 = b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} - 1 \right).$$

L'équation d'une sphère (Σ) ayant pour centre ω, et passant par les points A et A′ sera :

$$(x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2 + z^2 = (x_0 - a \cos \varphi)^2 + b^2 \sin^2 \varphi + \\ + b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} - 1 \right);$$

ou :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax \cos \varphi - 2by \sin \varphi = x_0^2 + b^2 \frac{x_0^2}{a^2 - b^2} - b^2 - 2ax_0 \cos \varphi ;$$

ce qui s'écrit :

$$2a(x - x_0) \cos \varphi + 2by \sin \varphi = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{a^2 x_0^2}{c^2},$$

en posant, suivant l'usage,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

L'équation de la sphère (Σ) est ainsi de la forme

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi = C ;$$

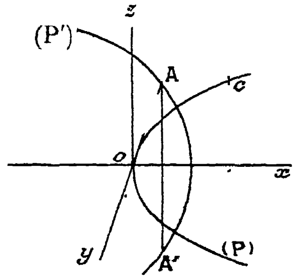
et l'équation de l'enveloppe, qui exprime que l'équation précédente a une racine double, est, par suite,

$$A^2 + B^2 = C^2.$$

Donc la cyclide a pour équation :

$$4a^2(x - x_0)^2 + 4b^2 y^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{a^2 x_0^2}{c^2} \right)^2.$$

2° Supposons maintenant qu'une des coniques soit une parabole. L'autre est aussi une parabole. Prenons pour Ox et Oy l'axe et la tangente au sommet de l'une de ces paraboles ; les équations de ces deux coniques sont :



(P) $z = 0, \quad y^2 = 2px,$
(P') $y = 0, \quad x^2 + z^2 = (x - p)^2.$

Le centre C de la sphère sur la parabole P a pour coordonnées :

$$x = 2p\lambda^2, \qquad y = 2p\lambda, \qquad z = 0.$$

Les points fixes A et A' sur la parabole (P') sont définis par les formules :

$$x_0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0^2 = (x_0 - p)^2 - x_0^2.$$

L'équation de la sphère est :

$$(x - 2p\lambda^2)^2 + (y - 2p\lambda)^2 + z^2 = (x_0 - 2p\lambda^2)^2 + 4p^2\lambda^2 + (x_0 - p)^2 - x_0^2,$$

ou :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 - p)^2 - 4p\lambda y - 4p(x - x_0)\lambda^2 = 0;$$

et l'équation de l'enveloppe, c'est-à-dire de la cyclide, est :

$$[x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 - p)^2](x - x_0) + py^2 = 0.$$

La surface, qui est en général du quatrième ordre, est ici du troisième seulement.

Surface canal isotrope

Parmi les surfaces réglées, nous avons considéré les surfaces développables, où chaque génératrice rencontre la génératrice infiniment voisine. Le cas correspondant pour les enveloppes de sphères sera celui où *chaque sphère est tangente à la sphère infiniment voisine.* Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le plan radical des deux sphères leur soit tangent.

Soit la sphère :

(1) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0.$$

Le plan radical de cette sphère et de la sphère infiniment voisine est :

(2) $$(x - a)da + (y - b)db + (z - c)dc + rdr = 0;$$

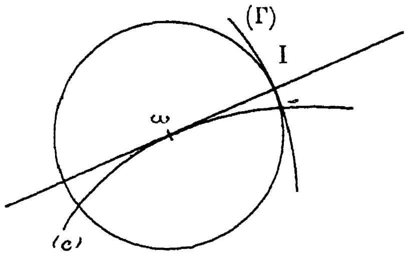
pour qu'il soit tangent à la sphère (1), il faut et il suffit que le carré de sa distance au centre (a, b, c) soit égale à r^2, donc que :

$$\frac{r^2dr^2}{da^2+db^2+dc^2}=r^2,$$

ou :

$$da^2+db^2+dc^2=dr^2. \tag{3}$$

Cette condition exprime que le rayon r est égal, au signe près, à l'arc s de la courbe (C), lieu des centres des sphères, cet arc étant



compté à partir d'une origine arbitraire. Comme r ne figure, dans l'équation (1), que par son carré, on pourra adopter la solution $r=s$.

Cherchons le point de contact de la sphère avec la sphère infiniment voisine. C'est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent (2) : ses coordonnées satisfont donc aux équations :

$$\frac{x-a}{da}=\frac{y-b}{db}=\frac{z-c}{dc}=\frac{-rdr}{dr^2}=-\frac{r}{dr}=-\frac{s}{ds};$$

d'où :

$$x=a-s\frac{da}{ds}=a-s\alpha,\qquad y=b-s\beta,\qquad z=c-s\gamma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la tangente. On obtient ainsi le point I, qui décrit une développante (Γ) de la courbe (C).

L'intersection d'une sphère avec la sphère infiniment voisine n'est autre que l'intersection de cette sphère avec un de ses plans tangents : c'est un couple de droites isotropes se coupant au point I. *L'enveloppe se compose de deux surfaces réglées à génératrices isotropes.* Nous l'appellerons une *surface canal isotrope.* Réciproquement *une surface réglée à génératrices isotropes est une nappe de l'enveloppe d'une famille de sphères dont chacune est tangente à la sphère infiniment*

voisine. Considérons, en effet, une génératrice isotrope (D) d'une telle surface (S). Par cette génératrice isotrope (D) passent une infinité de sphères ; ces sphères contiennent la droite (D) et le cercle imaginaire à l'infini, ce qui donne sept conditions : elles dépendent de deux paramètres arbitraires. Si nous imposons à une telle sphère la condition d'être tangente à la surface considérée (S) en deux points à distance finie de la droite (D), elle sera entièrement déterminée ; mais de plus elle est tangente à la surface (S) au point à l'infini sur (D). Donc cette sphère (Σ) se raccorde avec (S) tout le long de la génératrice (D). La surface (S) fera partie de l'enveloppe de ces sphères. De plus, la sphère (Σ) ayant en commun, avec la sphère infiniment voisine, une génératrice (D), lui sera tangente en deux points de cette génératrice : l'un deux, I, sera à distance finie.

Sur une telle surface (S), les deux systèmes de lignes de courbure sont confondus avec les génératrices isotropes [ch. III, § 7, p. 51]. Les deux nappes de la développée sont confondues avec la courbe (C) ; car les normales à (S), aux divers points d'une même génératrice isotrope (D), vont passer par le centre ω de la sphère (Σ) correspondante. La courbe (Γ) joue ici un rôle analogue à l'arête de rebroussement des surfaces développables. En effet, pour une développable, il y a un élément de contact (point de l'arête de rebroussement et plan osculateur en ce point) commun à une génératrice et à la génératrice infiniment voisine. Ici, c'est l'élément de contact constitué par le point I et le plan tangent à la sphère en ce point, plan normal à $I\omega$, qui est commun à la sphère (Σ) et à la sphère infiniment voisine.

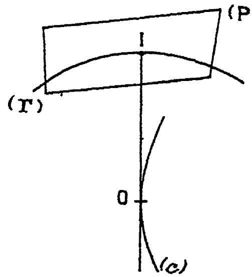
Le point I est un *ombilic* de la surface (S). Car, d'après ce qui vient d'être dit, le lieu (Γ) des points I est normal à $I\omega$, et a pour développée le lieu (C) des centres ω des sphères (Σ). Donc ω, centre de courbure principale double en tout point de (D), est encore, en I, centre de courbure normale de (Γ), puisqu'il est sur la normale à la surface et sur la surface polaire de (Γ). Dès lors, toutes les courbures normales sont égales en I ; et I est bien un ombilic.

Pour l'enveloppe des sphères (Σ), la ligne (Γ) est une ligne double, c'est un lieu d'ombilics pour chacune des deux surfaces (S), dont elle se compose, et qui sont tangentes en tout point de cette ligne. Nous l'appellerons la *ligne ombilicale* de la surface canal isotrope.

Bandes de courbure et bandes asymptotiques

4. — Considérons une surface (S_0) et une ligne asymptotique. Les tangentes à cette ligne en chacun de ses points engendrent une déve-

loppable, et l'élément de contact commun à une génératrice et à la génératrice infiniment voisine, comprenant un point de la ligne et le plan osculateur, qui est tangent à (S_0), est un élément de contact de (S_0).



Considérons, de même, une ligne de courbure (Γ) d'une surface (S_0) : la normale à cette surface, aux divers points I de (Γ), engendre une développable. Soit (C) l'arête de rebroussement, O le point de contact avec la normale ; OI est égal à l'arc de (C). Si donc nous considérons les sphères de centres O et de rayons OI, chacune de ces sphères touche la sphère infiniment voisine, et l'élément de contact [I, (P)], commun à ces deux sphères, est un élément de contact de la surface (S_0).

Appelons *sphère de courbure* de (S_0) toute sphère ayant pour centre un centre de courbure principal et pour rayon le rayon de courbure principal correspondant. Nous voyons que :

Les sphères de courbure de (S_0) *qui correspondent à une même ligne de courbure* (Γ), *enveloppent une surface canal isotrope, ayant* (Γ) *pour ligne ombilicale.*

Réciproquement, si une surface canal isotrope (S) *est circonscrite à la surface* (S_0) *le long de sa ligne ombilicale* (Γ), *celle-ci est ligne de courbure pour* (S_0), car les normales communes à (S_0) et à (S), aux divers points I de (Γ), enveloppent le lieu des centres O des sphères (Σ) qui ont (S) pour enveloppe. De plus, *les sphères* (Σ) *qui enveloppent la surface* (S), *sont les sphères de courbure de* (S_0), *qui correspondent à la ligne de courbure* (Γ) ; car le centre O de chacune d'elles est le point de contact de la normale IO avec le lieu de ces centres.

Les choses s'énoncent d'une manière plus nette en substituant à la notion de courbe la notion de *bande* ou *bandeau* d'éléments de contact. Une bande est, par définition, formée de ∞^1 éléments de contact appartenant à une même multiplicité [ch. VI, § 3] : le lieu des points de ces éléments de contact est une courbe, et les plans de ces éléments de contact sont tangents à la courbe aux points correspondants. Une *bande appartenant à une surface* est formée des points d'une courbe tracée sur la surface, associés aux plans tangents à la surface en ces points. Elle est formée, en d'autres termes, des éléments de contact communs à la courbe et à la surface.

On appellera *bande de rebroussement* d'une surface développable le lieu des éléments de contact communs à chaque génératrice et à la

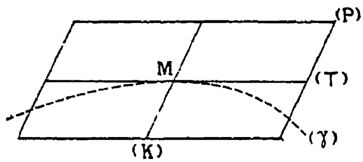
génératrice infiniment voisine. Et on appellera *bande ombilicale* d'une surface canal isotrope le lieu des éléments de contact communs à chacune des sphères inscrites à la surface et à la sphère infiniment voisine.

Appelons de même *bande asymptotique*, *bande de courbure* les lieux des éléments de contact d'une surface qui appartiennent, respectivement, à une ligne asymptotique, et à une ligne de courbure de cette surface. Et nous pourrons énoncer les résultats précédents :

Une bande asymptotique d'une surface est la bande de rebroussement d'une développable ; une bande de courbure d'une surface est la bande ombilicale d'une surface canal isotrope. Réciproquement : toute bande de rebroussement d'une développable, qui appartient à une surface (S_0), *est bande asymptotique de* (S_0)*; toute bande ombilicale d'une surface canal isotrope, qui appartient à une surface* (S_0), *est bande de courbure pour* (S_0).

On voit ainsi, en particulier, qu'au point de vue de la correspondance entre droites et sphères, les lignes asymptotiques correspondent aux lignes de courbure.

Remarques. — Sur chaque élément de contact [M, (P)] d'une bande, il y a *deux éléments linéaires* à considérer, un élément linéaire étant formé d'un point et d'une droite passant par ce point. Ce sont : *l'élément linéaire tangent* formé du point M de l'élément et de la tangente (T) à la courbe qui sert de *support* à la bande, courbe qu'on peut appeler simplement la *courbe de la bande ;* et l'*élément linéaire caractéristique* formé du point M et de la caractéristique (K) du plan (P), c'est-à-dire de la génératrice rectiligne de la développable enveloppée par les plans (P), ou *développable de la bande.* Ces deux éléments linéaires sont corrélatifs, au point de vue de la dualité ; une bande est corrélative d'une bande.



Dans une bande asymptotique, les éléments linéaires tangent et caractéristique (T) *et* (K) *sont confondus pour tout élément de contact de la bande et réciproquement ; dans une bande de courbure, ils sont rectangulaires et réciproquement.* Les termes de bande asymptotique et de bande de courbure ont donc un sens par eux-mêmes, sans supposer une surface (S_0) à laquelle appartienne la bande considérée.

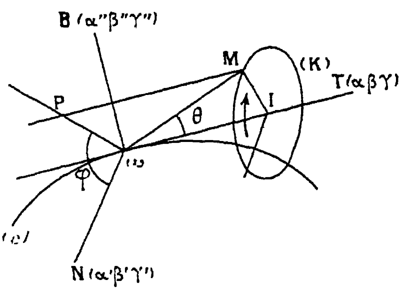
Si la bande de rebroussement est donnée, la développable correspondante est la développable de la bande. Si la bande de courbure est donnée, sa courbe (γ) est ligne de courbure de la développable de la

bande ; et la surface canal isotrope dont la bande ombilicale se confond avec cette bande de courbure est l'enveloppe des sphères de courbure de la développable, construites aux divers points M du support de la bande. *Les termes : bande ombilicale, bande de courbure, sont donc équivalents ; de même que ceux de bande asymptotique et bande de rebroussement.*

Remarquons encore que, si l'on se donne une bande de courbure, la sphère de courbure qui correspond à un élément de contact [M, (P)] de la bande est définie par la condition d'admettre [M, (P)] pour un de ses éléments de contact et d'avoir son centre sur la droite polaire de la courbe (γ) lieu des points M (Voir § 2 et § 3). Cette seconde condition exprime que la sphère a avec (γ) un contact du second ordre ; de même que dans une bande asymptotique chaque plan (P) est osculateur à (γ). C'est donc une nouvelle analogie entre les bandes de courbure et les bandes asymptotiques.

Lignes de courbure des enveloppes de sphères

5. — Nous connaissons déjà une des familles de lignes de courbure, celle qui est constituée par les caractéristiques des sphères. Déterminons la deuxième famille.



Soit (C) le lieu des centres des sphères (Σ) considérées. Exprimons les coordonnées x, y, z d'un de ses points en fonction de l'arc (s) ; l'une des sphères de centre ω rencontre la sphère infiniment voisine suivant un cercle (K) dont le plan est normal à la tangente ωT. Introduisons le trièdre de Serret, construit au point ω de la courbe (C), et définissons par rapport à ce trièdre les coordonnées d'un point M de la surface, c'est-à-dire du cercle (K). Appelons θ l'angle $\widehat{T\omega M}$: cet angle

est le même pour tous les points du cercle (K). Projetons M en P sur le plan normal, et soit φ l'angle (ωN, ωP) de ωP avec ωN, compté positivement de ωN vers ωB. Les coordonnées de M par rapport au trièdre de Serret sont, en appelant ρ le rayon de la sphère (Σ),

$$(1) \qquad \xi = \rho \cos \theta, \qquad \eta = \rho \sin \theta \cos \varphi, \qquad \zeta = \rho \sin \theta \sin \varphi.$$

Par rapport à un système d'axes quelconques, ces coordonnées sont,

$$(2) \qquad X = x + \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta, \qquad Y = y + b\xi + b'\eta + b''\zeta,$$
$$Z = z + c\xi + c'\eta + c''\zeta.$$

Ecrivons que (K) est le cercle caractéristique de la sphère (Σ) : ce cercle a pour équations :

$$\Sigma\,(X - x)^2 - \rho^2 = 0,$$
$$\Sigma\alpha\,(X - x) + \rho\frac{d\rho}{ds} = 0.$$

En supposant que le trièdre de coordonnées coïncide avec le trièdre de Serret, la deuxième équation devient :

$$\xi + \rho\frac{d\rho}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\rho \cos \theta + \rho\frac{d\rho}{ds} = 0,$$

ou :

$$(3) \qquad \cos \theta = -\frac{d\rho}{ds}.$$

L'angle θ est ainsi défini en fonction de s ; et la surface enveloppe des sphères (Σ) est, dès lors, représentée par les équations (2), au moyen des paramètres s et φ.

Cherchons ses lignes de courbure. Ce sont les trajectoires orthogonales des cercles (K), définis par $s = c^{te}$. La tangente à une courbe quelconque passant par M a pour coefficients directeurs :

$$dX = \alpha ds + \xi\frac{\alpha'}{R}ds - \eta\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right)ds + \zeta\frac{\alpha'}{T}ds + \alpha d\xi + \alpha' d\eta + \alpha'' d\zeta,$$

$$dY = \ldots, \qquad dZ = \ldots.$$

En prenant de nouveau le trièdre de Serret pour trièdre de coordonnées, ces coefficients directeurs deviennent :

$$\left(1 - \frac{\eta}{R}\right) ds + d\xi \qquad \left(\frac{\xi}{R} + \frac{\zeta}{T}\right) ds + d\eta \qquad -\frac{\eta}{T}\, ds + d\zeta.$$

Pour la tangente au cercle (K), $ds = 0$, et les coefficients directeurs sont :

$$\delta\xi = 0, \qquad \delta\eta = -\rho \sin\theta \sin\varphi\, d\varphi, \qquad \delta\zeta = \rho \sin\theta \cos\varphi\, d\varphi.$$

La condition qui définit les trajectoires orthogonales des cercles (K) est donc :

$$-\left[\left(\frac{\xi}{R} + \frac{\zeta}{T}\right) ds + d\eta\right] \sin\varphi + \left[-\frac{\eta}{T}\, ds + d\zeta\right] \cos\varphi = 0.$$

Elle devient en remplaçant ξ, η, ζ par leurs valeurs (1) :

$$\frac{\rho \cos\theta}{R} \sin\varphi\, ds + \frac{\rho \sin\theta}{T}\, ds - \rho \sin\theta .\, d\varphi = 0,$$

ou :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{\operatorname{cotg}\theta .\, \sin\varphi}{R}. \tag{4}$$

C'est une équation de la forme $\frac{d\varphi}{ds} = A \sin\varphi + B$.

Si on prend comme fonction inconnue $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, *on est ramené à une équation de Riccati.*

L'angle φ est l'angle du rayon IM avec un rayon origine, déterminé pour chaque cercle (K). On conclut donc, en raisonnant comme au Ch. VI, § 4, p. 141, que *quatre lignes de courbure non circulaires d'une enveloppe de sphères coupent les cercles caractéristiques en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.* Nouvelle analogie avec les lignes asymptotiques d'une surface réglée.

On obtient les simplifications habituelles si on connaît *a priori* une ou plusieurs intégrales de l'équation. Ainsi, si on considère une enveloppe de sphères (Σ) ayant leurs centres dans un plan, tous les cercles caractéristiques sont orthogonaux à la section de la surface par ce plan, qui est alors une ligne de courbure. La détermination des lignes de courbure se ramène dans ce cas à deux quadratures.

Remarque 1. — La recherche des *trajectoires orthogonales de* ∞^1 *cercles*, engendrant une surface cerclée quelconque, conduit aussi à

une équation de Riccati, comme nous allons le voir. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre I de l'un quelconque des cercles considérés, et ρ_0 son rayon ; soient α, β, γ les cosinus directeurs de son axe IT, qui ne sera pas ici, en général, tangent à une courbe fixe (C); soient enfin α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de deux directions IT', IT'', choisies de manière que le trièdre I.TT'T'' soit un trièdre trirectangle direct. Si on désigne par φ l'angle (IT', IM) de IT' avec un rayon quelconque IM du cercle, compté positivement de IT' vers IT'', les cosinus directeurs de ce rayon IM sont :

$$(5)\quad \alpha_0 = \alpha'\cos\varphi + \alpha''\sin\varphi,\ \beta_0 = \beta'\cos\varphi + \beta''\sin\varphi,\ \gamma_0 = \gamma'\cos\varphi + \gamma''\sin\varphi;$$

et les équations de la surface cerclée peuvent s'écrire :

$$(6)\qquad X = x_0 + \rho_0\alpha_0,\qquad Y = y_0 + \rho_0\beta_0,\qquad Z = z_0 + \rho_0\gamma_0,$$

x_0, y_0, z_0; ρ_0; α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' étant des fonctions d'un même paramètre t. Lorsque t varie, le tièdre I.TT'T'' se déplace, et il sera commode d'interpréter ce déplacement au point de vue cinématique, en considérant t comme la mesure du temps.

Cherchons les composantes d'un déplacement infinitésimal : dX, dY, dZ, sur la surface, relativement aux axes IT, IT', IT''. Dans le calcul s'introduisent les composantes sur les mêmes axes de la vitesse du centre I, et de la rotation instantanée du trièdre, que nous désignerons par les notations :

$$(7)\qquad \begin{cases} u_0 = \Sigma\alpha\dfrac{dx_0}{dt},\ v_0 = \Sigma\alpha'\dfrac{dx_0}{dt},\ w_0 = \Sigma\alpha''\dfrac{dx_0}{dt}; \\ p = \Sigma\alpha''\dfrac{d\alpha'}{dt},\ q = \Sigma\alpha\dfrac{d\alpha''}{dt},\ r = \Sigma\alpha'\dfrac{d\alpha}{dt}. \end{cases}$$

La sommation Σ s'étend aux lettres α, β, γ; x, y, z. Nous obtenons les formules :

$$(8)\qquad \begin{cases} U = \Sigma\alpha dX = [u_0 + \rho_0(q\sin\varphi - r\cos\varphi)]\,dt, \\ V = \Sigma\alpha' dX = (v_0 - \rho_0 p\sin\varphi)\,dt + \cos\varphi.\,d\rho_0 - \rho_0\sin\varphi\,d\varphi, \\ W = \Sigma\alpha'' dX = (w_0 + \rho_0 p\cos\varphi)\,dt + \sin\varphi.\,d\rho_0 + \rho_0\cos\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

qu'il serait facile de déduire directement de la théorie du mouvement relatif.

Si on exprime que ce déplacement (8) est normal au déplacement sur le cercle générateur, qui a pour composantes, sur les mêmes axes, o, $-\sin\varphi$, $\cos\varphi$, on obtient la condition qui définit les trajectoires orthogonales cherchées :

$$(9)\qquad \rho_0\frac{d\varphi}{dt} - v_0\sin\varphi + w_0\cos\varphi + \rho_0 p = 0.$$

On vérifierait sans peine que l'équation (3) trouvée au Ch. VI, § 3, pour les trajectoires d'une famille de cercles dans un plan, est un cas particulier de celle-ci.

En prenant, comme alors, pour inconnue $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, on ramènera cette équation (9) à la forme d'une équation de Riccati ; et, comme alors, on pourra conclure de là, en particulier, que *les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles établissent entre les points de deux quelconques de ces cercles une correspondance homographique.*

Remarque 2. — Du calcul, fait plus haut, pour arriver aux équations paramétriques d'une enveloppe de sphères, on conclut que, pour que ∞^1 cercles soient les cercles caractéristiques de ∞^1 sphères, il faut et il suffit : 1° que leurs axes engendrent une surface développable ; 2° que, si on définit alors chacun de ces cercles par l'intersection d'une sphère ayant pour centre le point de contact ω de l'axe du cercle avec la courbe (C) que cet axe enveloppe, et d'un demi-cône de révolution ayant son sommet au même point ω, l'arc s de (C), le rayon ρ de cette sphère, et l'angle θ que fait la direction positive de la tangente à (C) avec les génératrices de ce demi-cône soient liés par la formule (3) ; c'est-à-dire par la condition :

$$(10) \qquad d\rho + \cos\theta .\, ds = 0,$$

qu'on retrouverait, du reste, en appliquant à ωM la formule générale sur la variation d'un segment de droite [Ch. V, § 6].

Mais on peut remplacer ces conditions par une autre. Remarquons, en effet, que le cercle caractéristique d'une sphère variable :

$$(11) \qquad \Sigma (X - x)^2 - \rho^2 = 0, \qquad \Sigma (X - x)\, dx + \rho d\rho = 0,$$

rencontre le cercle infiniment voisin aux deux points qui sont définis par ces équations (11) et l'équation obtenue en différentiant la seconde. Et cherchons à exprimer qu'un cercle variable quelconque, représenté par les équations (6), rencontre effectivement en deux points son cercle infiniment voisin.

Les points de rencontre de ce cercle avec le cercle infiniment voisin, s'il y en a, sont définis par les équations $dX = dY = dZ = 0$, c'est-à-dire par les équations équivalentes $U = V = W = 0$. Eliminant l'inconnue auxiliaire $d\varphi$, on obtient donc, pour déterminer ces points, les deux équations :

$$(12) \qquad r\cos\varphi - q\sin\varphi - \frac{u_0}{\rho_0} = 0, \qquad v_0\cos\varphi + w_0\sin\varphi + \frac{d\rho_0}{dt} = 0.$$

On en déduirait facilement la condition exprimant que ces équations ont, en $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, une solution commune :

$$\left(q\rho_0\frac{d\rho_0}{dt} - u_0 w_0\right)^2 + \left(r\rho_0\frac{d\rho_0}{dt} + u_0 v_0\right)^2 = (qv_0 + rw_0)^2\rho_0^2.$$

C'est la condition pour que chaque cercle rencontre le cercle infiniment voisin en un point, c'est-à-dire pour que les ∞^1 cercles considérés aient une courbe enveloppe.

Pour qu'il y ait deux points communs, il faut et il suffit que les équations (12) soient identiques. Cela donne d'abord la condition :

$$qv_0 + rw_0 = 0.$$

En tenant compte des formules (7), cette condition s'écrit :

$$0 = \begin{vmatrix} \Sigma\alpha' dx_0 & \Sigma\alpha'' dx_0 \\ \Sigma\alpha' d\alpha & \Sigma\alpha'' d\alpha \end{vmatrix} = \Sigma(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(dy_0.d\gamma - dz_0.d\beta) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ dx_0 & dy_0 & dz_0 \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}.$$

Elle exprime donc que l'axe du cercle engendre une développable, ce qui est la première des conditions énoncées plus haut pour les cercles générateurs d'une surface canal.

Cette condition étant supposée remplie, nous réintroduisons les notations du début du paragraphe, et les coordonnées x, y, z du point de contact ω de l'axe du cercle avec son enveloppe (C) ; en posant :

(13) $$h = \omega\mathrm{I} = \rho\cos\theta,$$

nous avons alors, successivement :

$$x_0 = x + h\alpha, \qquad y_0 = y + h\beta, \qquad z_0 = z + h\gamma;$$
$$dx_0 = \alpha(ds + dh) + hd\alpha, \qquad dy_0 = \ldots, \qquad dz_0 = \ldots;$$
$$u_0 dt = ds + dh, \qquad v_0 = hr, \qquad w_0 = -hq;$$

de sorte que les équations (12) deviennent :

$$r\cos\varphi - q\sin\varphi - \frac{ds + dh}{\rho_0 dt} = 0, \qquad r\cos\varphi - q\sin\varphi + \frac{d\rho_0}{hdt} = 0.$$

La condition d'identité de ces équations se réduit donc à :

$$h(ds + dh) + \rho_0 d\rho_0 = 0,$$

ce qui, en observant que :

$$h^2 + \rho_0^2 = \rho^2, \qquad hdh + \rho_0 d\rho_0 = \rho d\rho,$$

s'écrit :

$$hds + \rho d\rho = 0.$$

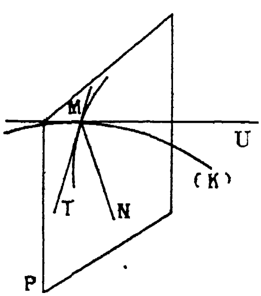
Il ne reste plus qu'à remplacer h par sa valeur (13), pour retrouver la condition (10), qui achève, d'après ce qu'on a vu, de caractériser les cercles caractéristiques de ∞^1 sphères.

Nous concluons donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que ∞^1 cercles engendrent une surface canal, ou, d'une manière plus précise, pour qu'ils soient les cercles caractéristiques de ∞^1 sphères, est que chacun d'eux rencontre en deux points le cercle infiniment voisin.*

Cas où une des nappes de la développée est une développable

6. — Nous venons de considérer le cas où une des nappes de la développée d'une surface est une courbe. Corrélativement, considérons maintenant le cas où une des nappes de la développée est une surface développable. Alors les plans tangents à cette développable constituent une des familles de développables de la congruence ; un tel plan (P) coupe la surface suivant une courbe normale à toutes les droites de la congruence situées dans ce plan et qui sera une ligne de courbure. En tout point de cette ligne, la normale à la surface est dans le plan (P). Donc le plan (P) coupe orthogonalement la surface (S) tout le long de la ligne de courbure.

Réciproquement, si une surface coupe orthogonalement une famille de plans, ses sections par ces plans sont des lignes de courbure, d'après le Théorème de Joachimsthal, et ces plans, constituant une des familles de développables de la congruence des normales, enveloppent une développable, qui est une des nappes de la développée de la surface.



Considérons la deuxième ligne de courbure passant par un point M de la surface ; sa tangente MU est perpendiculaire à la tangente MT à la première ligne de courbure, et à la normale MN à la surface ; ces

deux droites étant dans le plan (P), MU est perpendiculaire au plan (P). *Les lignes de courbure de la deuxième famille sont trajectoires orthogonales des plans* (P).

Considérons une de ces trajectoires orthogonales (K) ; les plans (P) sont normaux à la courbe (K) : l'une des nappes de la développée, celle qui est une développable, est ainsi l'enveloppe des plans normaux, ou la surface polaire de la courbe (K). *Toutes les lignes de courbure* (K) *non planes ont donc même surface polaire, qui est l'enveloppe des plans des lignes de courbure planes. L'arête de rebroussement de cette surface est le lieu des centres des sphères osculatrices aux diverses courbes* (K) [Ch. I, § 12]. La courbe (K) étant une ligne de courbure, les normales à la surface en tous les points de (K) forment une développable, et par suite enveloppent une développée de la courbe (K), qui est une géodésique de sa surface polaire. Si donc on part des plans (P), pour avoir les courbes (K) on est ramené à la recherche des géodésiques d'une surface développable, ce qui se réduit à des quadratures ; et comme la surface cherchée peut être considérée comme engendrée par les courbes (K), on voit qu'on obtiendra cette surface par des quadratures.

Partons des plans (P), et cherchons directement leurs trajectoires orthogonales. Considérons l'arête de rebroussement (A) de l'enveloppe des plans (P), et introduisons le trièdre de Serret en chaque point ω de cette courbe, soit $(\omega.\ \xi\eta\zeta)$. Le plan (P) est le plan osculateur $\xi\omega\eta$, et nous voulons chercher dans ce plan un point M (ξ, η) dont le lieu soit normal à (P). Les coordonnées de M sont :

$$X = x + \alpha\xi + \alpha'\eta, \quad Y = y + \beta\xi + \beta'\eta, \quad Z = z + \gamma\xi + \gamma'\eta\ ;$$

la direction de la tangente au lieu du point M a pour coefficients directeurs :

$$(1)\quad dX = \alpha ds + \xi\frac{\alpha'}{R}ds - \eta\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right)ds + \alpha d\xi + \alpha' d\eta, dY = .., dZ = ...,$$

expressions de la forme :

$$dX = A\alpha + B\alpha' + C\alpha'',\ dY = A\beta + B\beta' + C\beta'',\ dZ = A\gamma + B\gamma' + C\gamma''.$$

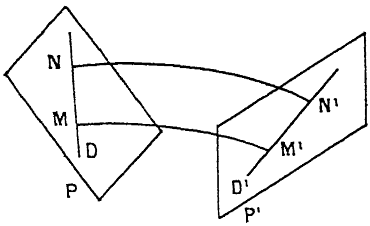
Ecrivons que cette direction est normale au plan $\xi\omega\eta$, c'est-à-dire parallèle à la binormale α'', β'', γ''. Ceci nous donne $A = B = O$, ou :

$$ds - \frac{\eta}{R}.\ ds + d\xi = 0, \qquad \frac{\xi}{R}ds + d\eta = 0\ ;$$

ou :

$$(2)\qquad \frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{R} - 1, \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{R}\ ;$$

ξ, η sont donc donnés par deux équations différentielles du premier ordre. Il en résulte que par chaque point du plan (P) passe une trajectoire orthogonale et une seule. Il existe ainsi une correspondance point par point entre les divers plans (P), les points correspondants étant sur une même trajectoire orthogonale. Considérons, dans un plan (P), deux points M, N ; et soit (D) la droite MN ; lorsque le plan (P) varie, la droite (D) engendre une surface réglée sur laquelle les lieux des points M et N sont trajectoires orthogonales des génératrices ; or les trajectoires orthogonales interceptent sur les génératrices des segments égaux ; il en résulte que si l'on considère deux positions (P), (P'), et les positions MN, M'N' correspondantes, MN = M'N'. *La correspondance entre deux quelconques des plans* (P) *déterminée par les trajectoires orthogonales de cette famille de plans, transforme toute courbe de l'un des plans en une courbe égale.* En particulier, les plans (P) contenant les lignes de courbure planes, *toutes les lignes de courbure planes de la surface* (S) *sont égales. Elle est donc engendrée par le mouvement d'une courbe plane de forme invariable.* Pour achever de la définir, il suffit de connaître le mouvement de son plan (P).



Pour cela, reprenons les équations (2) :

$$(2) \qquad \frac{d\xi}{ds} - \frac{\eta}{R} + 1 = 0, \qquad \frac{d\eta}{ds} + \frac{\xi}{R} = 0,$$

et intégrons-les. Considérons d'abord les équations sans second membre :

$$R\frac{d\xi}{ds} - \eta = 0, \qquad R\frac{d\eta}{ds} + \xi = 0.$$

Posons, en introduisant l'arc σ de l'indicatrice sphérique de (A)

$$(3) \qquad d\sigma = \frac{ds}{R};$$

les équations deviennent :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} - \eta = 0, \qquad \frac{d\eta}{d\sigma} + \xi = 0,$$

système d'équations linéaires sans second membre à coefficients constants, dont l'intégrale générale est :

(4) $\quad \xi = A\cos\sigma + B\sin\sigma, \qquad \eta = -A\sin\sigma + B\cos\sigma.$

Passons alors au système avec second membre :

(5) $$\frac{d\xi}{d\sigma} = \eta - R, \qquad \frac{d\eta}{d\sigma} = -\xi.$$

Considérons, dans (4), suivant la méthode de la variation des constantes, A, B comme des fonctions de σ, et cherchons à satisfaire au système (5). Il vient :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \eta + \frac{dA}{d\sigma}\cos\sigma + \frac{dB}{d\sigma}\sin\sigma = \eta - R, \; \frac{d\eta}{d\sigma} = -\xi - \frac{dA}{d\sigma}\sin\sigma + \frac{dB}{d\sigma}\cos\sigma = -\xi;$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dA}{d\sigma}\cos\sigma + \frac{dB}{d\sigma}\sin\sigma = -R, \qquad -\frac{dA}{d\sigma}\sin\sigma + \frac{dB}{d\sigma}\cos\sigma = 0;$$

d'où :

$$\frac{dA}{d\sigma} = -R\cos\sigma, \qquad \frac{dB}{d\sigma} = -R\sin\sigma;$$

ou, en réintroduisant s d'après la formule (3),

$$\frac{dA}{ds} = -\cos\sigma, \qquad \frac{dB}{ds} = -\sin\sigma;$$

et :

$$A = -\int\cos\sigma . ds, \qquad B = -\int\sin\sigma . ds.$$

Posons :

(6) $$x_0 = \int\cos\sigma . ds, \qquad y_0 = \int\sin\sigma . ds;$$

alors :

$$A = -x_0, \qquad B = -y_0.$$

Nous avons donc une intégrale particulière :

$$\xi = -x_0\cos\sigma - y_0\sin\sigma, \qquad \eta = x_0\sin\sigma - y_0\cos\sigma;$$

et l'intégrale générale est, x_1, y_1 désignant deux constantes arbitraires,

(7) $$\xi = (x_1 - x_0)\cos\sigma + (y_1 - y_0)\sin\sigma,$$
$$\eta = -(x_1 - x_0)\sin\sigma + (y_1 - y_0)\cos\sigma.$$

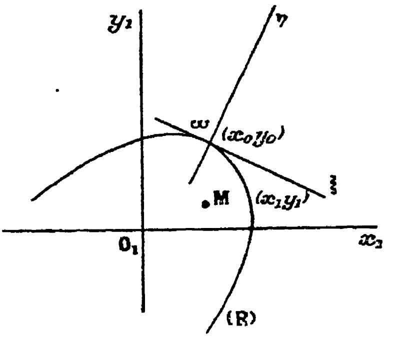
Telles sont les formules qui définissent les trajectoires orthogonales des plans (P). *Elles supposent que l'on a effectué les trois quadratures* (3) *et* (6).

Interprétons géométriquement ces résultats :

Les formules précédentes, résolues en x_1, y_1, donnent :

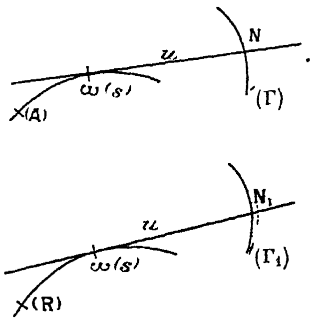
$$(8) \qquad x_1 = x_0 + \xi \cos\sigma - \eta \sin\sigma, \qquad y_1 = y_0 + \xi \sin\sigma + \eta \cos\sigma.$$

Prenons dans le plan (P) deux axes fixes $O_1\,x_1$, $O_1\,y_1$, et construisons par rapport à ces axes la courbe (R) lieu du point (x_0, y_0). La courbe (R) est la courbe du plan (P) qui a même rayon de courbure que l'arête de rebroussement (A). Pour chaque valeur de s, le point (x_0, y_0) occupe une position ω sur la courbe (R), et σ est l'angle de la tangente à (R) en ω avec $O_1\,x_1$. Considérons un système d'axes $\omega\xi\eta$, où l'axe $\omega\xi$ est la tangente à (R) correspondant au sens dans lequel se déplace ω ; σ est l'angle de $\omega\xi$ avec $O_1\,x_1$; ξ, η, fonctions de s, sont les coordonnées d'un point M, fixe par rapport au système $x_1\,O_1\,y_1$, prises par rapport aux axes $\xi\omega\eta$; et x_1, y_1 sont les coordonnées de ce même point par rapport aux axes $x_1\,O_1\,y_1$. Pour avoir la trajectoire orthogonale, il suffit de porter le plan (P) dans l'espace, sur le plan osculateur à la courbe (A), les droites du plan, nommées $\omega\xi$ et $\omega\eta$, coïncidant respectivement avec la tangente $\omega\xi$ et la normale principale $\omega\eta$ de (A) ; dans ce mouvement, les courbes (R) et (A) coïncideront successivement en tous leurs points ; les rayons de courbure étant les mêmes en grandeur et en signe, les centres de courbure seront confondus. Si s varie, la courbe (R) va rouler sur la courbe (A), et un point quelconque M invariablement lié à la courbe (R) décrira la trajectoire orthogonale. *Le mouvement du plan* P *s'obtiendra donc en faisant rouler la courbe plane* (R) *sur la courbe* (A) *de façon que le plan* P *coïncide à chaque instant avec le plan osculateur à la courbe* (A). On peut dire que *le plan* P *roule sur la développable qu'il enveloppe*, comme nous allons l'expliquer.



Considérons l'arête de rebroussement (A) et une tangente $\omega\xi$; pour développer cette courbe sur un plan, il faut [ch. V, § 4] construire la courbe plane dont le rayon de courbure en chaque point a même expression en fonction de l'arc que celui de la courbe (A) : c'est précisément la courbe (R). La position d'un point N sur la développable est définie par l'arc s, qui fixe la position du point ω sur (A), et par le segment $\omega N = u$. Le point N_1 qui correspond à N dans le développe-

ment est déterminé par les mêmes valeurs de s, u. Les génératrices de la développable viennent se développer suivant les tangentes à la courbe (R). Considérons une courbe (Γ) sur la développable, et la courbe correspondante (Γ_1) dans le plan : les arcs homologues sur ces deux courbes sont égaux, de sorte que toute courbe tracée sur le plan roule sur la courbe correspondante de la développable. On peut imaginer que l'on ait enroulé sur la développable une feuille plane déformable ; le mouvement du plan (P) consistera alors à dérouler cette feuille de façon qu'elle reste constamment tendue. Un point quelconque de la feuille décrira une trajectoire orthogonale des plans tangents à la développable. Nous obtenons ainsi, en quelque sorte, la *surface développante d'une développable*, par la généralisation du procédé qui donne les développantes d'une courbe plane.



Nous allons enfin examiner le mouvement du plan (P) au point de vue cinématique. Nous avons, d'après (1) et (2) :

$$\frac{dX}{ds} = -\frac{\alpha''}{T}\eta, \qquad \frac{dY}{ds} = -\frac{\beta''}{T}\eta, \qquad \frac{dZ}{ds} = -\frac{\gamma''}{T}\eta ;$$

et par suite les projections de la vitesse du point M sur les axes $\xi\eta\zeta$ invariablement liés au plan (P) sont :

$$V_\xi = \Sigma\alpha\frac{dX}{ds} = 0, \qquad V_\eta = \Sigma\alpha'\frac{dY}{ds} = 0, \qquad V_\zeta = \Sigma\alpha''\frac{dZ}{ds} = -\frac{1}{T}\eta.$$

Le mouvement instantané du plan (P) est une rotation autour de $\omega\xi$ tangente à (A), la rotation instantanée étant $-\frac{1}{T}$. *Le plan osculateur* (P) *roule sur la courbe* (A) *en tournant autour de la tangente avec une vitesse angulaire égale à* $-\frac{1}{T}$.

La surface (S) engendrée par le mouvement précédent est une *surface moulure*, ou *surface de Monge*.

Considérons dans le plan (P) une courbe (C) invariablement liée au système d'axes $\omega\xi\eta$, et sa développée (K). Dans le mouvement du plan (P), la courbe (C) engendrera une surface moulure (S) ayant pour une des nappes de sa développée la développable sur laquelle roule le plan (P). Et comme les normales à (C), qui sont normales à (S), sont

tangentes à (K), la deuxième nappe de la développée de (S) sera engendrée par la développée (K) du profil (C). C'est donc aussi une surface moulure. Ainsi *une des nappes de la développée d'une surface moulure est une développable, l'autre est une surface moulure.*

Cas particuliers

Examinons le cas particulier où la développable enveloppe du plan (P) est un cylindre ou un cône.

1° Si *le plan* (P) *enveloppe un cylindre*, les tangentes aux trajectoires orthogonales sont parallèles aux plans de section droite, les trajectoires orthogonales sont les développantes des sections droites ; ce sont des lignes planes ; *les deux systèmes de lignes de courbure de la surface sont des courbes planes. Le plan* (P) *roule sur le cylindre de façon que son intersection avec le plan d'une section droite roule sur cette section droite. On peut encore engendrer la surface en considérant dans un plan une famille de courbes parallèles* (*qui sont ici les développantes de la section droite du cylindre*), *et en déplaçant chacune de ces courbes d'un mouvement de translation perpendiculaire au plan.*

2° Supposons que *le plan* (P) *enveloppe un cône* de sommet A ; et considérons une trajectoire orthogonale rencontrant le plan (P) en M. La tangente en M est perpendiculaire à AM, dont la trajectoire orthogonale est une courbe tracée sur une sphère de centre A. Coupons alors le cône par une sphère de centre A et de rayon R, soit (C) l'intersection, et considérons dans le plan P le cercle (S) de centre A et de rayon R. *Le plan* P *roule sur le cône de façon que le cercle* (S) *roule sur la courbe* (C).

Autres hypothèses. — Cherchons maintenant si les deux nappes de la développée d'une surface peuvent être des développables. La surface est alors surface moulure de deux manières ; les deux systèmes de lignes de courbure sont des courbes planes. Les trajectoires orthogonales des plans (P), qui enveloppent l'une des nappes de la développée, constituant un des systèmes de lignes de courbure, doivent être planes. Soit (P^1) le plan de l'une d'elles. Les plans (P) sont tous normaux à une courbe située dans (P^1) ; ils sont donc tous perpendiculaires à (P^1). Si donc les plans (P) ne sont pas parallèles, les plans (P^1) le sont tous ; les plans (P) enveloppent un cylindre, et les plans (P^1) sont perpendiculaires aux génératrices de ce cylindre, ainsi que les normales à la surface ; le profil situé dans un plan (P) et qui engendre la surface moulure est une parallèle aux génératrices

du cylindre. Les surfaces obtenues sont donc des cylindres ; la seconde nappe de la développée est une droite rejetée à l'infini.

Si les plans (P) sont parallèles, on arrive à la même conclusion, car les plans (P^1) enveloppent un cylindre.

Le cas supposé est donc impossible.

Supposons qu'une des nappes de la développée soit une développable, l'autre étant une courbe. La surface est une surface moulure qui s'obtient par le mouvement d'un profil situé dans le plan (P) qui enveloppe la développable. La deuxième nappe de la développée est engendrée dans ce mouvement par la développée du profil ; pour que ce soit une courbe, il faut que la développée du profil soit un point, donc que ce profil soit un cercle ; imaginons alors la sphère qui a ce profil pour grand cercle ; elle est inscrite dans la surface ; *la surface est une enveloppe de sphères de rayon constant.* C'est une surface canal à section circulaire constante.

Réciproquement toute enveloppe d'une famille de sphères égales satisfait à la condition précédente. Soit une sphère, de centre a, b, c et de rayon r constant :

$$\Sigma(x - a)^2 - r^2 = 0\,;$$

la caractéristique a pour deuxième équation :

$$\Sigma(x - a)da = 0.$$

C'est donc un grand cercle de la sphère ; les normales à la surface enveloppe sont dans le plan de ce cercle. L'une des nappes de la développée sera l'enveloppe des plans de ce cercle. Si nous considérons le lieu du centre de la sphère, le plan du grand cercle lui est constamment normal ; *la surface est engendrée par un cercle de rayon constant dont le centre décrit une courbe, et dont le plan reste constamment normal à cette courbe.*

Enfin, comme cas singulier, nous avons encore celui où l'*une des nappes de la développée est une droite. La surface est alors de révolution autour de cette droite.*

CHAPITRE VIII

LES CONGRUENCES DE DROITES ET LES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX SURFACES

Nouvelle représentation des congruences

1. — Dans ce qui précède, nous avons défini une congruence par son support, et en donnant la direction de la droite ou des droites (D) qui passent par chaque point du support. On peut plus généralement, et ce sera préférable au point de vue projectif, considérer deux surfaces supports se correspondant point par point, les droites de la congruence étant celles qui joignent les points homologues des deux surfaces. En réalité, les deux surfaces se correspondront élément de contact à élément de contact, et, en même temps que la congruence des droites joignant les points homologues, on pourra considérer celle des intersections des plans tangents homologues.

Il est naturel alors d'employer des coordonnées homogènes. Soient $M(x, y, z, t)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ les points homologues sur les deux surfaces ; la congruence sera définie par les équations :

$$X = x + \rho x_1, \qquad Y = y + \rho y_1, \qquad Z = z + \rho z_1, \qquad T = t + \rho t_1.$$

Soient de même u, v, w, r les coordonnées tangentielles d'un plan tangent à la première surface, u_1, v_1, w_1, r_1 celles du plan tangent homologue à la deuxième surface. La congruence sera définie au point de vue tangentiel par les équations :

$$U = u + \rho u_1, \qquad V = v + \rho v_1, \qquad W = w + \rho w_1, \qquad R = r + \rho r_1.$$

Soient (S), (S_1) les deux surfaces supports ; les systèmes conjugués sur ces surfaces étant invariants, d'après leur définition même, par toute transformation projective, nous sommes conduits à étudier les relations qui existent entre eux. Soient :

$$\begin{array}{lllll}(S) & x = f(\lambda, \mu), & y = g(\lambda, \mu), & z = h(\lambda, \mu), & t = k(\lambda, \mu),\\ (S_1) & x_1 = f_1(\lambda, \mu), & y_1 = g_1(\lambda, \mu), & z_1 = h_1(\lambda, \mu), & t_1 = k_1(\lambda, \mu),\end{array}$$

les coordonnées des points courants, homologues, des deux surfaces.

Le choix des paramètres λ, μ est fixé par le Théorème suivant : *Quand deux surfaces* (S), (S_1) *se correspondent point par point, il existe sur* (S) *un réseau conjugué qui correspond à un réseau conjugué de* S_1, *et en général il n'en existe qu'un.* Soient, en effet, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, et $\delta'\lambda$, $\delta'\mu$ les variations infinitésimales des paramètres correspondant aux directions des deux courbes d'un réseau conjugué qui se croisent en un point (λ, μ) de (S) : ces directions sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions asymptotiques, définies par les variations $d\lambda$, $d\mu$ qui satisfont à l'équation :

$$E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda.d\mu + G'd\mu^2 = 0. \tag{1}$$

Donc, en interprétant les variations $d\lambda$, $d\mu$; $\delta\lambda$, $\delta\mu$; $\delta'\lambda$, $\delta'\mu$ comme les coordonnées homogènes de divers points d'une droite, la condition qui exprime que les directions définies sur (S) par $\delta\lambda$, $\delta\mu$; $\delta'\lambda$, $\delta'\mu$ sont conjuguées s'interprète ainsi : les deux points ($\delta\lambda$, $\delta\mu$), ($\delta'\lambda$, $\delta'\mu$) sont conjugués harmoniques par rapport au couple de points défini par l'équation (1).

De même, sur (S_1), deux directions conjuguées sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions :

$$E'_1d\lambda^2 + 2F'_1d\lambda.d\mu + G'_1d\mu^2 = 0\,; \tag{2}$$

et, pour que $\delta\lambda$, $\delta\mu$; $\delta'\lambda$, $\delta'\mu$ définissent deux telles directions, il faut et il suffit, d'après l'interprétation précédente, que les deux points ($\delta\lambda$, $\delta\mu$), ($\delta'\lambda$, $\delta'\mu$) soient conjugués harmoniques par rapport au couple de points défini par l'équation (2).

Chercher un système conjugué commun revient donc à chercher un couple de points conjugués harmoniques par rapport aux deux couples donnés par deux équations quadratiques (1) et (2). Si les deux formes quadratiques n'ont pas de facteur commun, il y a un couple et un seul répondant à la question, qui est le couple des points doubles de l'involution définie par les deux couples (1) et (2). Or les deux équations précédentes définissent les lignes asymptotiques des deux surfaces ; si donc deux surfaces se correspondent point par point d'une façon telle qu'il n'y ait pas sur (S) une famille d'asymptotiques correspondant à une famille d'asymptotiques de (S_1), il existe un système conjugué de (S) et un seul qui correspond à un système conjugué de (S_1) ; et il est défini par l'équation :

$$\begin{vmatrix} E'd\lambda + F'd\mu & F'd\lambda + G'd\mu \\ E'_1d\lambda + F'_1d\mu & F'_1d\lambda + G'_1d\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Il y aura impossibilité si les formes (1) et (2) ont un facteur commun ;

et indétermination si les deux facteurs sont communs, c'est-à-dire si les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces. Ecartant ces cas d'exception, nous supposerons que les paramètres λ, μ correspondent au système conjugué commun.

Emploi des coordonnées homogènes

2. — Nous allons reprendre les formules usuelles, et voir ce qu'elles deviennent en coordonnées homogènes.

Une *courbe* en coordonnées homogènes est définie par quatre équations :

$$x = f(\lambda), \qquad y = g(\lambda), \qquad z = h(\lambda), \qquad t = k(\lambda).$$

La tangente au point $M(x, y, z, t)$ joint le point M au point M' dont les coordonnées sont dx, dy, dz, dt. Car le point à l'infini, dont les coordonnées homogènes sont :

$$d\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\,dx + xd\frac{1}{t}, \quad d\left(\frac{y}{t}\right) = \frac{1}{t}\,dy + yd\frac{1}{t}, \quad d\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{1}{t}\,dz + zd\frac{1}{t},$$
$$0 = \frac{1}{t}\,dt + td\frac{1}{t}$$

est bien sur la droite ainsi définie. Le plan osculateur passe par la droite MM' et par le point M'' de coordonnées : d^2x, d^2y, d^2z, d^2t. Car le point à l'infini, dont les coordonnées homogènes sont :

$$d^2\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\,d^2x + 2dx.d\frac{1}{t} + xd^2\frac{1}{t}, \quad d^2\left(\frac{y}{t}\right) = \ldots\ldots, \quad d^2\left(\frac{z}{t}\right) = \ldots,$$
$$0 = \frac{1}{t}\,dt^2 + 2dt.d\frac{1}{t} + t.d^2\frac{1}{t}$$

est bien dans le plan ainsi défini.

Corrélativement il résulte de la théorie classique des enveloppes que la *développable* enveloppe du plan (P), de coordonnées :

$$u = f(\lambda), \qquad v = g(\lambda), \qquad w = h(\lambda), \qquad r = k(\lambda),$$

aura pour génératrice l'intersection du plan (P) et du plan (P') de coordonnées : du, dv, dw, dr. Le point de contact avec l'arête de rebroussement sera, en outre, dans le plan (P'') de coordonnées d^2u, d^2v, d^2w, d^2r.

Une *surface* quelconque sera définie au point de vue ponctuel par des équations :

(1) $x = f(\lambda, \mu)$, $\quad y = g(\lambda, \mu)$, $\quad z = h(\lambda, \mu)$, $\quad t = k(\lambda, \mu)$;

et au point de vue tangentiel par des équations :

(2) $u = F(\lambda, \mu)$ $\quad v = G(\lambda, \mu)$, $\quad w = H(\lambda, \mu)$, $\quad r = K(\lambda, \mu)$.

Cherchons à définir le *plan tangent* en partant des équations ponctuelles (1). Ce plan contient le point, donc :

$$\Sigma ux = 0 ;$$

il contient les tangentes aux courbes $\lambda = c^{te}$, $\mu = c^{te}$, donc les points $\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \frac{\partial t}{\partial \mu}\right)$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial t}{\partial \lambda}\right)$; d'où les conditions :

$$\Sigma u \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0, \qquad \Sigma u \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0.$$

Nous avons ainsi trois équations définissant des quantités proportionnelles à u, v, w, r. L'équation ponctuelle du plan tangent au point x, y, z, t) est donc .

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ x & y & z & t \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial t}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} & \frac{\partial t}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Corrélativement on définira un *point* de la surface, en partant des équations tangentielles (2), par les conditions :

$$\Sigma ux = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0.$$

En définitive, *on définit l'un des éléments point, plan tangent, en fonction de l'autre, au moyen des formules :*

(3) $\qquad \Sigma ux = 0, \qquad \Sigma u dx = 0, \qquad \Sigma x du = 0.$

Proposons-nous maintenant *d'exprimer que deux directions* $MT(d\lambda, d\mu)$ et $MS(\delta\lambda, \delta\mu)$ *sont conjuguées*. Ces directions sont conjuguées si, le point de contact du plan tangent se déplaçant dans la direction MT, la droite MS est la caractéristique de ce plan tangent. Or cette caractéristique est définie par les équations :

$$\Sigma uX = 0, \qquad \Sigma X du = 0 ;$$

la droite MS est définie par le point (x, y, z, t) et le point $(\delta x, \delta y, \delta z, \delta t)$. Pour exprimer que MS est la caractéristique, il faut exprimer que ces deux points sont sur la caractéristique, ce qui donne :

$$\Sigma ux = 0, \qquad \Sigma x du = 0;$$
$$\Sigma u.\delta x = 0, \qquad \Sigma du.\delta x = 0.$$

Les trois premières équations sont vérifiées, d'après les formules (3), pour toute direction tangente $(\delta\lambda, \delta\mu)$ et pour toute direction caractéristique $(d\lambda, d\mu)$; *nous obtenons donc la condition unique*

$$\Sigma du.\delta x = 0, \tag{4}$$

ou la condition symétrique, équivalente,

$$\Sigma \delta u.dx = 0, \tag{4'}$$

qu'on obtiendrait par un calcul analogue, en changeant le rôle des deux directions. En particulier nous trouvons la condition pour qu'une direction soit conjuguée d'elle-même, c'est-à-dire soit *direction asymptotique :*

$$\Sigma du.dx = 0. \tag{5}$$

Cela posé, *exprimons que les courbes* $\lambda = c^{te}$, $\mu = c^{te}$ *forment un réseau conjugué*. Les conditions équivalentes (4), (4') donnent ici :

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0. \tag{6}$$

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0. \tag{6'}$$

Ces conditions peuvent se transformer : l'équation identique

$$\Sigma u \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0,$$

différentiée par rapport à λ donne, en effet,

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \Sigma u \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = 0 ;$$

et (6) s'écrit

$$\Sigma u \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda . \partial \mu} = 0. \tag{7}$$

En partant de l'une des relations

$$\Sigma x \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0, \qquad \Sigma x \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0,$$

on obtiendrait, de même, la relation de condition, nécessaire et suffisante,

$$(7') \qquad \Sigma x \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda . \partial \mu} = 0.$$

Ces équations (7), (7') dépendent simultanément des éléments ponctuels et tangentiels. En exprimant u, v, w, r en fonction de x, y, z, t, et de leurs dérivées, on obtient la condition en coordonnées ponctuelles :

$$(8) \qquad \left| \, x \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} \, \right| = 0.$$

Dans cette relation (8), le premier membre représente, par abréviation, le déterminant dont la première ligne serait la ligne écrite entre les deux traits verticaux, et dont les trois autres lignes se déduiraient de celle-là en y remplaçant x par y, z, t respectivement. *Cette notation sera employée couramment dans la suite.*

Lorsque $t = c^{te}$, la condition (5) se réduit à la condition connue

$$\left| \, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda . \partial \mu} \, \right| = F' = 0.$$

La condition (8) peut s'interpréter ainsi : il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments correspondants des lignes, donc il existe des fonctions L, M, N de λ et μ, telles que l'on ait identiquement :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda . \partial \mu} = L \frac{\partial x}{\partial \lambda} + M \frac{\partial x}{\partial \mu} + N x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} = \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} = \ldots$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda \partial \mu} = \ldots;$$

c'est-à-dire : *les quatre coordonnées homogènes* x, y, z, t *satisfont à une même équation linéaire aux dérivées partielles de la forme :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda . \partial \mu} = L \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + M \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + N \varphi.$$

En opérant au point de vue tangentiel, on verrait de même que *la condition* (7'), *qui s'écrit, avec une notation analogue à celle qui vient d'être introduite,*

$$\left| \, u \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial u}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \partial \mu} \, \right| = 0,$$

exprime que u, v, w, r *sont des intégrales d'une même équation aux dérivées partielles de la forme*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda\partial\mu} = P\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + Q\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} + R\Phi.$$

On montrerait sans peine que si x, y, z, t, ou u, v, w, r satisfont à une équation de la forme précédente, elles ne satisfont qu'à une seule.

Remarque. — En coordonnées cartésiennes, on devra supposer $t = k(\lambda, \mu) \equiv 1$; et le résultat précédent s'applique aux coordonnées ponctuelles x, y, z, en faisant $N = 0$.

Considérons maintenant une *surface réglée;* les équations d'une génératrice, joignant le point M (x, y, z, t) au point M_1 (x_1, y_1, z_1, t_1) sont :

$$X = x + \rho x_1, \quad Y = y + \rho y_1, \quad Z = z + \rho z_1, \quad T = t + \rho t_1.$$

Supposons la surface *développable ;* les plans tangents aux points (x, y, z, t) et (x_1, y_1, z_1, t_1) sont les mêmes. Or, le plan tangent en M, passant par la génératrice et par la tangente à la courbe $\rho = 0$, contient le point (dx, dy, dz, dt). De même le plan tangent en M_1, contient le point (dx_1, dy_1, dz_1, dt_1). La condition pour que les plans soient confondus est donc

$$| \; x \quad x_1 \quad dx \quad dx_1 \; | = 0.$$

Si nous définissions la surface en coordonnées tangentielles, nous arriverions de même à la condition

$$| \; u \quad u_1 \quad du \quad du_1 \; | = 0.$$

Passons enfin aux *congruences :* une congruence sera encore représentée par les équations

$$X = x + \rho x_1, \quad Y = y + \rho y_1, \quad Z = z + \rho z_1, \quad T = t + \rho t_1 ;$$

mais ici x, y, z, t et x_1, y_1, z_1, t_1 sont fonctions de deux paramètres arbitraires (λ, μ). Cherchons les *éléments focaux.* Soit F un foyer d'une droite (D) de paramètres (λ, μ). Soit ρ la valeur qui, portée dans les équations précédentes, donne les coordonnées de ce point. Toutes les surfaces réglées de la congruence, qui contiennent la droite (D), ont, en ce point F, même plan tangent. Considérons, en particulier, les surfaces $\lambda = c^{te}$ et $\mu = c^{te}$. Les plans tangents à ces surfaces contiennent respectivement les points (x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1), $\left(\frac{\partial x}{\partial\mu} + \rho\frac{\partial x_1}{\partial\mu}, \ldots\right)$; et (x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t), $\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \rho\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}, \ldots\right)$. La condition pour que

ces plans coïncident, c'est-à-dire *l'équation aux points focaux*, est donc

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} + \rho \frac{\partial x_1}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

On trouvera de même *l'équation aux plans focaux :*

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial u}{\partial \mu} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les coordonnées homogènes étaient définies par la condition que les rapports $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ soient les coordonnées cartésiennes correspondantes. On constaterait sans peine que les résultats obtenus s'appliquent aux coordonnées plus générales qu'on déduirait de celles-là par une transformation linéaire homogène quelconque.

Correspondances spéciales

3. — Nous allons étudier la *correspondance entre deux points* M, M_1 *de deux surfaces, telle que les développables de la congruence des droites* MM_1 *coupent les deux surfaces suivant les deux réseaux conjugués qui se correspondent.* Telle est, par exemple, relativement aux réseaux conjugués formés par leurs lignes de courbure, la correspondance déterminée, sur deux surfaces parallèles, par la congruence de leurs normales communes. Nous supposerons que les paramètres λ, μ, qui fixent la position d'un point sur chacune des surfaces, sont précisément tels que les courbes conjuguées homologues soient $\lambda = c^{te}$ et $\mu = c^{te}$. Les courbes $\lambda = c^{te}$, $\mu = c^{te}$ sont conjuguées sur la première surface (S); donc x, y, z, t satisfont [§ 2] à une même équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} = P \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + R\varphi; \tag{1}$$

de même les courbes $\lambda = c^{te}$ et $\mu = c^{te}$ étant conjuguées sur la deuxième surface (S_1), x_1, y_1, z_1, t_1, satisfont à une même équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} = P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + Q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + R_1\varphi. \tag{2}$$

Exprimons maintenant que les développables de la congruence cor-

respondent à $\lambda = c^{te}$ et $\mu = c^{te}$. Si nous représentons la congruence par les équations :

$$X = x + \rho x_1, \qquad Y = y + \rho y_1, \qquad Z = z + \rho z_1, \qquad T = t + \rho t_1,$$

les développables sont données [§ 2] par l'équation :

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & dx & dx_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu, \qquad dy = \ldots., \qquad dz = \ldots., \qquad dt = \ldots. ;$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x_1}{\partial \mu} d\mu, \qquad dy_1 = \ldots, \qquad dz_1 = \ldots., \qquad dt_1 = \ldots. ;$$

et l'équation précédente devant être vérifiée pour $d\lambda = 0$, $d\mu = 0$, nous obtenons les conditions :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x_1}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Elles expriment qu'il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments des lignes, donc qu'il existe des facteurs A, B, A_1, B_1 ; C, D, C_1, D_1, tels que l'on ait les identités :

$$(5) \qquad Ax + B\frac{\partial x}{\partial \lambda} = A_1 x_1 + B_1 \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \text{ et les analogues ;}$$

$$(6) \qquad Cx + D\frac{\partial x}{\partial \mu} = C_1 x_1 + D_1 \frac{\partial x_1}{\partial \mu}, \text{ et les analogues.}$$

Premier cas. — Voyons d'abord ce qui arrive si l'un des quatre coefficients B, B_1, D, D_1 est nul. Soit, par exemple, $B_1 = 0$. Alors les équations (5) expriment que le point $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ est sur la droite qui joint les points M (x, y, z, t) et M' $\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial t}{\partial \lambda}\right)$. La droite MM_1 est tangente à la courbe $\mu = c^{te}$ tracée sur la surface (S). Toutes les droites MM_1 sont ainsi tangentes à la surface (S) qui est une des nappes de la surface focale de la congruence. Sur cette surface focale (S), les courbes $\mu = c^{te}$ sont les arêtes de rebroussement d'une des familles de développables de la congruence ; et, par suite, les courbes $\lambda = c^{te}$, conjuguées des précédentes, sont les courbes de contact des développables de la deuxième famille. Cherchons comment il faut définir (S_1) pour que cette surface soit coupée suivant un réseau conjugué par les développables de la congruence. Les équations (5) s'écri-

vent, dans le cas considéré, en supposant, comme il est loisible, $A_1 = 1$,

$$x_1 = Ax + B\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \; y_1 = Ay + B\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \; z_1 = Az + B\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \; t_1 = At + B\frac{\partial t}{\partial \lambda}.$$

Posons, les coordonnées homogènes pouvant être remplacées par des quantités proportionnelles,

$$x = \theta X, \qquad y = \theta Y, \qquad z = \theta Z, \qquad t = \theta T;$$

Les formules précédentes deviennent ainsi, θ étant une fonction de λ, μ,

$$x_1 = A\theta X + B\left(\theta\frac{\partial X}{\partial \lambda} + X\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}\right), \quad y_1 = \ldots., \quad z_1 = \ldots., \quad t_1 = \ldots..$$

Déterminons la fonction θ par la condition :

$$A\theta + B\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = 0,$$

ce qui est toujours possible. Alors :

$$x_1 = B\theta\frac{\partial X}{\partial \lambda}, \qquad y_1 = B\theta\frac{\partial Y}{\partial \lambda}, \qquad z_1 = B\theta\frac{\partial Z}{\partial \lambda}, \qquad t_1 = B\theta\frac{\partial T}{\partial \lambda};$$

et comme les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à un facteur près, nous pouvons écrire, en remettant x, y, z, t pour X, Y, Z, T,

$$(7) \qquad x_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad y_1 = \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \qquad t_1 = \frac{\partial t}{\partial \lambda}.$$

Alors, d'après ces relations, l'équation différentielle (1), qui est vérifiée pour $\varphi = x, y, z, t$, donne :

$$(8) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = Px_1 + Q\frac{\partial x}{\partial \mu} + Rx, \text{ et les analogues,}$$

conditions de la forme (6). Les équations (3) et (4) sont donc vérifiées.

Différentions la relation (8) par rapport à λ :

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial P}{\partial \lambda}x_1 + P\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + Q\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}x + R\frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Mais, x_1 satisfait à l'équation (2), c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda \partial \mu} = P_1\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + Q_1\frac{\partial x_1}{\partial \mu} + R_1 x_1,$$

et l'identité précédente devient, en tenant compte aussi de (7),

$$(9) \quad P_1\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + Q_1\frac{\partial x_1}{\partial \mu} + R_1 x_1 = \frac{\partial P}{\partial \lambda}x_1 + P\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + Q\frac{\partial x_1}{\partial \mu} + Rx_1 + \\ + \frac{\partial Q}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}x.$$

Les équations (8), (9) sont deux équations en x et $\frac{\partial x}{\partial \mu}$. Si on peut les résoudre, on en peut tirer x, en particulier, en fonction linéaire de x_1, $\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial x_1}{\partial \mu}$; donc le point M (x, y, z, t) se trouve dans le plan des trois points (x_1, y_1, z_1, t_1) $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \ldots\right)$ $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu}, \ldots\right)$, c'est-à-dire dans le plan tangent en M_1, à la surface (S_1). La droite MM_1 est donc aussi tangente à (S_1), et (S_1) est la deuxième nappe de la surface focale *Nous avons donc, dans ce cas, la correspondance point par point établie, entre les deux nappes de la surface focale, par les rayons de la congruence.*

Ecartons ce cas qui a été étudié au chapitre VI. Il faut alors supposer que les équations (8), (9) ne sont pas résolubles en x et $\frac{\partial x}{\partial \mu}$; ce qui exige que :

$$\begin{vmatrix} Q & R \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que l'on ait une identité de la forme :

$$R = Q.\Psi(\mu).$$

Reprenons alors la relation (8), et multiplions les coordonnées x, y, z, t ; x_1, y_1, z_1, t_1 par un facteur ω, fonction de μ, de façon à simplifier la relation (8), qui s'écrit :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = Px_1 + Q\left[\frac{\partial x}{\partial \mu} + x\,\Psi(\mu)\right].$$

Nous choisirons le facteur ω de manière que l'expression entre crochets se réduise à $\omega \frac{\partial x}{\partial \mu}$; comme ce facteur ω ne dépend pas de λ, les équations (7) subsistent, et nous obtenons des relations de la forme :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = P'x_1 + Q'\frac{\partial x}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = \ldots, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \mu} = \ldots, \qquad \frac{\partial t_1}{\partial \mu} = \ldots$$

Ceci revient à supposer $R = 0$ dans les équations (1) ; ce qui donne enfin :

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = P\frac{\partial x}{\partial \lambda} + Q\frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} = \ldots, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} = \ldots, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \lambda \partial \mu} = \ldots$$

Il est facile de voir réciproquement que, si x, y, z, t satisfont à (10),

et si les équations (7) ont lieu, les conditions (1), (2), (3), (4) sont satisfaites. Tout d'abord, (3) et (1) le sont. Les équations (10) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = P x_1 + Q \frac{\partial x}{\partial \mu}, \; \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots,$$

de sorte que la condition (4) est vérifiée aussi. On tire enfin de là, en différentiant,

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial P}{\partial \lambda} x_1 + P \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial x_1}{\partial \mu} + \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu} - P x_1\right)\frac{\partial Q}{\partial \lambda}, \text{ et les analogues ;}$$

ce qui donne bien des équations de la forme (2).

Deuxième cas. — Nous supposons maintenant B, D, B_1, $D_1 \neq 0$. Reprenons les équations (5), (6). En multipliant x, y, z, t et x_1, y_1, z_1, t_1 par des facteurs convenables, on peut faire disparaître dans (5) le terme en x et le terme en x_1, de sorte que :

$$(11) \quad \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = L \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = L \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = L \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial t_1}{\partial \lambda} = L \frac{\partial t}{\partial \lambda}.$$

L'équation (6) s'écrit ensuite :

$$(12) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = M_{\,\partial \mu} + N x + S x_1 ;$$

différentions par rapport à λ, en tenant compte de (11) :

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(L \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(M \frac{\partial x}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(N x) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(S x_1) ;$$

$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}$ d'après (1) s'exprime en fonction de x, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, et la relation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(S x_1) = F\left(x, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \mu}\right),$$

F étant une fonction linéaire, ou encore :

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} x_1 + S L \frac{\partial x}{\partial \lambda} = F\left(x, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \mu}\right).$$

Si $\frac{\partial S}{\partial \lambda} \neq 0$, x_1 est fonction linéaire de x, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$. Le point M est dans le plan tangent en M à la surface (S), qui est alors une des nappes de la surface focale, cas qui a été précédemment examiné. Il faut donc supposer $\frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$, S n'est fonction que de μ. Alors, si nous reprenons

l'équation (12), nous pouvons multiplier x_1, y_1, z_1, t_1 par une fonction de μ telle que le terme en x_1 disparaisse, les relations (11) gardant la même forme. Et nous ramènerons (12) à la forme :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \mathrm{H}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{K}x.$$

Le même raisonnement montrera que K est indépendant de λ, et que par suite on peut faire disparaître le terme en x. Finalement les équations (12) peuvent être réduites à la forme :

$$(13) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial t}{\partial \mu}.$$

Les relations (11) et (13) sont d'ailleurs suffisantes, car on en conclut :

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right),$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right);$$

d'où :

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right),$$

équation de la forme (1), où $\mathrm{R} = 0$; on obtiendrait de même :

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}\right),$$

équation de la forme (2) où $\mathrm{R}_1 = 0$.

Conclusions. — Dans le *premier cas*, où la surface (S) est une des focales de la congruence, supposée donnée, nous avons été amenés à faire disparaître le terme en x dans l'équation :

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{R}x,$$

relative à cette focale, au moyen de deux transformations qui équivalent à une transformation unique de la forme

$$x = \varpi \mathrm{X}.$$

On trouve directement, pour déterminer ce facteur ϖ, la condition :

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \lambda \partial \mu} = \mathrm{P}\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial \varpi}{\partial \mu} + \mathrm{R}\varpi ;$$

de sorte que les équations (7) montrent que *toute surface* (S_1) *coupée*

suivant un réseau conjugué par les développables de la congruence est définie par les équations :

$$x_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{x}{\varpi}\right) \qquad y_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{y}{\varpi}\right) \qquad z_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{z}{\varpi}\right) \qquad t_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{t}{\varpi}\right)$$

ϖ étant une intégrale de l'équation (1).

Passons au *deuxième cas* où aucune des deux surfaces n'est focale de la congruence. On se donne l'une d'elles, la surface (S) ; et le réseau conjugué suivant lequel elle devra être coupée par les développables de la congruence cherchée. Il faut de nouveau faire disparaître le terme en x de l'équation (1) qui correspond à ce réseau conjugué de (S) ; ce qui revient encore à chercher une intégrale de cette équation. L'équation prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu} = P\frac{\partial x}{\partial\lambda} + Q\frac{\partial x}{\partial\mu}. \tag{17}$$

Pour déterminer ensuite les facteurs L et M des formules (11) et (13), identifions cette équation (17) avec l'équation (14) précédemment obtenue. Cela donne les conditions :

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = P(M - L), \qquad \frac{\partial M}{\partial\lambda} = Q(L - M).$$

Posons :

$$L - M = \psi ; \tag{18}$$

et ces équations deviennent :

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = -P\psi, \tag{19}$$

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda} = Q\psi. \tag{20}$$

La première pouvant s'écrire :

$$\frac{\partial M}{\partial\mu} = -\frac{\partial\psi}{\partial\mu} - P\psi, \tag{19'}$$

la condition de comptabilité de ces équations est que ψ soit une intégrale de l'équation :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu} + \frac{\partial(P\psi)}{\partial\lambda} + \frac{\partial(Q\psi)}{\partial\mu} = 0 \tag{21}$$

qui est ce qu'on appelle *l'adjointe* de (17). Ayant ψ, on détermine par

une quadrature L et M ; car on a, par exemple, par (19′) et (20), la différentielle totale de M ; et l'équation (18) donne alors L. De nouvelles quadratures achèvent de déterminer, au moyen des formules (11) et (13) ; la surface (S_1), et, par là même, la congruence.

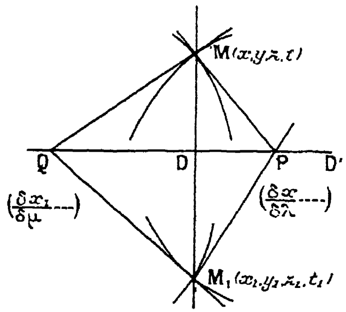
Propriétés de la correspondance précédente

Il résulte de l'analyse précédente que les équations (11) et (13),

$$(11) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = L \frac{dx}{\partial \lambda}, \text{ et les analogues,}$$

$$(13) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = M \frac{\partial x}{\partial \mu}, \text{ et les analogues,}$$

caractérisent entièrement la correspondance spéciale, point par point, déterminée sur deux surfaces (S) et (S_1) par les rayons d'une congruence, dont les développables coupent chacune de ces deux surfaces suivant un réseau conjugué. Nous allons examiner les propriétés géométriques qui résultent de ces formules.



Soient :

$M(x, y, z, t)$, $\qquad M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$

deux points homologues ; soit P le point de coordonnées : $\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \ldots\right)$; ou : $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \ldots\right)$; et Q le point, $\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}, \ldots\right)$, ou : $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu}, \ldots\right)$. La droite PM est tangente en M à la courbe $\mu = c^{te}$ sur la surface (S), et PM_1 est tangente en M_1 à la courbe $\mu = c^{te}$, sur la surface (S_1). De même la droite QM est tangente en M à la courbe $\lambda = c^{te}$ sur la surface (S), et QM_1 est tangente en M_1 à la courbe $\lambda = c^{te}$ sur la surface (S_1). Les plans tangents aux deux surfaces (S), (S_1) aux points M, M_1 se coupent donc suivant la droite PQ.

Considérons la congruence de ces droites PQ. Elle est définie par les équations :

$$X = \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad Y = \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad Z = \frac{\partial z}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad T = \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial t}{\partial \mu}.$$

Les développables de cette congruence sont définies par l'équation :

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} d\lambda + \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} d\mu \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} d\lambda + \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} d\mu \right| = 0 ;$$

mais x, y, z, t satisfont à des identités de la forme :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = \mathrm{P} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathrm{Q} \frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \ldots., \quad \ldots., \quad \ldots. ;$$

de sorte que l'équation précédente s'écrit :

$$\Delta . d\lambda . d\mu = 0,$$

Δ étant un déterminant qui n'est pas nul, puisque l'équation n'est pas une identité. *Les développables de la congruence des droites* PQ, *intersections des plans tangents aux deux surfaces en deux points homologues, correspondent donc aux développables de la congruence des droites* MM_1, *qui joignent ces points homologues, c'est-à-dire encore aux systèmes conjugués homologues des deux surfaces.*

Cherchons maintenant les points focaux. Ils sont donnés par l'équation :

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} \right| = 0,$$

équation qui, à cause de la même condition que précédemment, se réduit à $\rho = 0$; une racine est nulle, l'autre infinie ; *les points focaux ne sont autres que les points* P, Q. *Ils sont dans les plans focaux de la congruence des droites* MM_1. Ces plans focaux sont, en effet, les plans $\mathrm{MM}_1\mathrm{P}$, $\mathrm{MM}_1\mathrm{Q}$; car ils doivent être tangents aux deux développables de la congruence qui passent par MM_1, et celles-ci coupent, par hypothèse, les deux surfaces (S) et (S_1) suivant les courbes $\mu = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$, dont les tangentes sont, respectivement, MP, $\mathrm{M}_1\mathrm{P}$ et MQ, $\mathrm{M}_1\mathrm{Q}$.

Considérons le point P, et supposons que l'on fasse $\lambda = c^{te}$. La direction de la tangente à la trajectoire du point P est définie par un deuxième point, dont les coordonnées sont :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) = \mathrm{P} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathrm{Q} \frac{\partial x}{\partial \mu}, \text{ et les analogues.}$$

C'est un point de PQ. Le point P décrit donc une courbe tangente à PQ ; c'est l'arête de rebroussement de la développable de la con-

gruence des droites PQ qui correspond à la valeur considérée $\lambda = c^{te}$. Le point Q décrira de même, si μ reste constant, l'arête de rebroussement de la développable qui correspond à cette valeur $\mu = c^{te}$.

On voit que la correspondance entre les deux surfaces (S) et (S_1), définie d'abord, au point de vue ponctuel, par la congruence (K) des droites MM_1, ou (D), se trouve définie, de même, au point de vue tangentiel, par la congruence (K') des droites PQ, ou (D') : deux points homologues, M et M_1, étant les points de contact des plans tangents menés aux deux surfaces par un même rayon (D'). Aux développables de (K') correspondent ainsi, sur (S) et (S_1), les deux réseaux conjugués homologues considérés. Les couples de points homologues M, M_1 étant ainsi définis, la congruence (K) des droites MM_1 en résulte à son tour : et les plans focaux du rayon (D) de cette congruence passent par les foyers P et Q du rayon homologue (D') de la congruence (K').

Les propriétés de la correspondance que nous venons d'étudier se transforment donc en elles-mêmes par dualité. En choisissant convenablement les coordonnées tangentielles homogènes, on aurait, par suite, en même temps que les formules (11) et (13), des identités :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = H \frac{\partial u}{\partial \lambda}, \text{ et les analogues ;}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mu} = K \frac{\partial u}{\partial \mu}, \text{ et les analogues.}$$

En résumé, *si les développables d'une congruence* (K) *coupent deux surfaces* (S), (S_1) *suivant deux réseaux conjugués, les couples de plans tangents à* (S) *et* (S_1) *dont les points de contact sont sur un même rayon* (D) *de* (K) *se coupent suivant les rayons* (D') *d'une nouvelle congruence* (K'), *telle que les points de contact des plans tangents menés à* (S) *et* (S_1) *par les génératrices des développables de cette congruence* (K') *décrivent les deux mêmes réseaux conjugués homologues ; et réciproquement. Les points focaux du rayon* (D'), (K') *sont dans les plans focaux du rayon associé* (D) *de* (K), *chaque point focal se trouvant dans le plan focal qui ne lui correspond pas.*

La correspondance entre les deux surfaces est, en fait, une correspondance élément de contact à élément de contact, dont les propriétés se correspondent par dualité, quand on passe des points aux plans de ces éléments, ou inversement.

Correspondance par plans tangents parallèles

4. — Considérons une correspondance, point par point, entre deux surfaces (S) et (S_1). Soit, sur la surface (S), l'une des courbes (C) du réseau conjugué qui correspond à un réseau conjugué sur (S_1), et soit (C_1) la courbe correspondante sur (S_1) Supposons qu'en deux points homologues quelconques les plans tangents aux surfaces (S), (S_1) soient parallèles ; leurs caractéristiques le sont aussi ; donc *les directions conjuguées homologues sont parallèles.* Supposant ici que les coordonnées t et t_1 soient égales à 1, ce parallélisme se traduit par des identités de la forme :

$$(1)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 0.$$

$$(2)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial t}{\partial \mu} = 0.$$

Nous pouvons donc appliquer les résultats précédemment obtenus. Les plans tangents en M, M_1 étant parallèles, la droite PQ est à l'infini. Les droites de la congruence (K') sont les droites du plan de l'infini. Sur chacune de ces droites, les points P, Q sont les points où elles sont rencontrées par les tangentes conjuguées homologues sur (S) et (S_1), et le lieu des points P, Q est tangent à chaque droite PQ aux points P, Q.

Cas particulier. — En particulier, supposons que, la surface (S) étant quelconque, la surface (S_1) soit une sphère. La congruence des droites MM_1 a des développables qui découpent sur (S) et (S_1) des réseaux conjugués, les tangentes homologues étant parallèles. Or sur une sphère, un réseau conjugué est un réseau orthogonal ; donc le réseau conjugué de (S) est aussi un réseau orthogonal : c'est le réseau des *lignes de courbure*, dont la recherche est ainsi ramenée à celle des développables d'une congruence. En particulier, supposons la surface (S) du deuxième degré, et considérons la congruence des droites PQ du plan de l'infini. Le plan de l'infini coupe (S), (S_1) suivant deux coniques (Γ), (Γ_1). Considérons leurs points d'intersection avec une droite PQ ; les points d'intersection avec (Γ) correspondent aux directions des génératrices de (S) qui passent par M, et qui sont les tangentes asymptotiques ; les points P, Q, qui correspondent aux directions principales, sont donc conjugués par rapport à ces points d'intersection, c'est-à-dire conjugués par rapport à la conique (Γ). Ils sont de même conjugués par rapport à (Γ_1). Les points P, Q sont les points

doubles de l'involution déterminée sur la droite PQ par le faisceau de coniques ayant pour bases (Γ), (Γ_1). La droite PQ est tangente en P, Q aux deux coniques de ce faisceau qui lui sont tangentes ; de sorte que la détermination des développables de la congruence (K), c'est-à-dire des lignes de courbure de la quadrique (S), revenant à celle d'un faisceau de coniques, peut se faire algébriquement.

Si on prend pour paramètres ceux des génératrices rectilignes qui passent par un point de (S), on obtient ainsi l'intégration de l'*équation d'Euler*.

Considérons, en effet, l'hyperboloïde à une nappe :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{3}$$

qui, rapporté à ses génératrices rectilignes, a pour équations paramétriques :

$$x = a\frac{1 - uv}{u - v}, \qquad y = b\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad z = c\frac{u + v}{u - v}. \tag{4}$$

La normale en un point ayant pour coefficients de direction :

$$\frac{x}{a^2}, \quad -\frac{y}{b^2}, \quad \frac{z}{c^2},$$

l'équation différentielle des lignes de courbure, qui exprime que cette normale rencontre la normale infiniment voisine, est :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{a^2} & \dfrac{dx}{a^2} & dx \\ -\dfrac{y}{b^2} & -\dfrac{dy}{b^2} & dy \\ \dfrac{z}{c^2} & \dfrac{dz}{c^2} & dz \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$(b^2 + c^2)\, xdydz + (a^2 - c^2)\, ydzdx - (a^2 + b^2)\, zdxdy = 0. \tag{5}$$

La différentiation des formules (4) donne :

$$\frac{dx}{a\,[-(1 - v^2)du + (1 - u^2)dv]} = \frac{dy}{b\,[-(1 + v^2)du + (1 + u^2)dv]} = \tag{6}$$
$$= \frac{dz}{2c\,[-vdu + udv]} = \frac{1}{(u - v)^2}$$

et l'équation (5) devient ainsi, toutes réductions faites, l'équation d'Euler,

$$\frac{du^2}{\Phi(u^2)} = \frac{dv^2}{\Phi(v^2)}, \tag{7}$$

en posant :

$$(8)\qquad \Phi(\omega) = \omega^2 + 2k\omega + 1, \qquad k = \frac{b^2 + 2c^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Les points P et Q de la théorie précédente sont les points à l'infini des tangentes aux lignes de courbure : leurs coordonnées homogènes X, Y, Z sont donc données par les dénominateurs des formules (6), où du, dv devront être remplacés par les valeurs proportionnelles $\sqrt{\Phi(u^2)}$, $\pm\sqrt{\Phi(v^2)}$, tirées de l'équation (7).

Les développables des congruences considérées, et, par conséquent, les lignes de courbure de la surface, s'obtiendront, d'après ce qui précède, en écrivant que l'un ou l'autre des points (X, Y, Z) ainsi définis décrit, dans le plan à l'infini T = o, une des coniques du faisceau :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \sigma\left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right) = 0.$$

On obtient ainsi, après suppression du facteur $dudv$, l'intégrale générale algébrique annoncée :

$$(9)\qquad \pm\sqrt{\Phi(u^2)}\sqrt{\Phi(v^2)} - \Phi_0(u^2, v^2) - m(u-v)^2 = 0,$$

où $\Phi_0(\omega, \omega')$ désigne le polynôme polaire du trinôme $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega, \omega') = \omega\omega' + k(\omega + \omega') + 1,$$

et où m est une constante arbitraire, liée à σ par l'équation :

$$m(a^2 + b^2) = -2(\sigma + c^2).$$

Chassons le radical, en tenant compte de l'identité, classique dans la théorie des formes quadratiques binaires,

$$\Phi(\omega)\Phi(\omega') - \Phi_0^2(\omega, \omega') = \Delta^2(\omega - \omega')^2,$$

où Δ est le discriminant de la forme. Nous obtiendrons, après division par $(u-v)^2$, l'intégrale générale rationnelle :

$$(9')\qquad (1-k^2)(u+v)^2 = m^2(u-v)^2 + 2m\Phi_0(u^2, v^2).$$

Or $2\Phi_0(u^2, v^2)$ s'écrit :

$$2\Phi_0(u^2, v^2) = (1+uv)^2 + (1-uv)^2 + k(u+v)^2 + k(u-v)^2.$$

En tenant compte des formules (4), on voit ainsi que les lignes de courbure sont les intersections de l'hyperboloïde avec les quadriques :

$$m\frac{x^2}{a^2} + m\frac{y^2}{b^2} + (mk - 1 + k^2)\frac{z^2}{c^2} + mk + m^2 = 0.$$

Remplaçons cette équation par la combinaison homogène, obtenue en lui ajoutant l'équation (3), multipliée par $(mk + m^2)$:

$$m(m+k+1)\frac{x^2}{a^2}-m(m+k-1)\frac{y^2}{b^2}+(m+k+1)(m+k-1)\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Celle-ci s'écrit encore :

$$\frac{x^2}{a^2(m+k-1)}-\frac{y^2}{b^2(m+k+1)}+\frac{z^2}{c^2m}=0,$$

ou, à cause de la valeur (8) de k,

$$\frac{x^2}{a^2[m(a^2+b^2)+2c^2-2a^2]}-\frac{y^2}{b^2[m(a^2+b^2)+2c^2+2b^2]}+\frac{z}{c^2[m(a^2+b^2)]}=0.$$

En posant alors :

$$-2s=m(a^2+b^2)+2c^2,$$

on l'écrit enfin :

$$\frac{x^2}{a^2(s+a^2)}+\frac{y^2}{b^2(s-b^2)}+\frac{z^2}{c^2(s+c^2)}=0.$$

Il suffit dès lors de lui ajouter l'équation de l'hyperboloïde, après l'avoir elle-même multipliée par $(-s)$, pour obtenir l'équation des quadriques homofocales :

$$\frac{x^2}{s+a^2}+\frac{y^2}{s-b^2}+\frac{z^2}{s+c^2}=1. \tag{10}$$

On trouve donc ce résultat classique que *les lignes de courbure de l'hyperboloïde* (3) *sont les intersections de cette surface par les ellipsoïdes et les hyperboloïdes à deux nappes homofocaux*, représentés par l'équation (10). [Cf. chap. XII, § 1 et § 6].

Remarque 1 — Au lieu du plan de l'infini, on pourrait considérer un plan fixe quelconque (π). La correspondance serait telle que les plans tangents en deux points homologues de (S), (S_1) se coupent dans le plan (π). Les résultats seraient analogues ; et de même si, corrélativement, on établissait entre les deux surfaces une correspondance telle que la droite MM_1 passe par un point fixe.

Remarque 2. — Considérons deux surfaces (S), (S_1) qui se correspondent par plans tangents parallèles. Prenons dans l'espace un point fixe O, et substituons à (S_1) une de ses homothétiques par rapport à O, soit (S'_1). A tout réseau conjugué sur (S_1) correspond sur (S'_1) un réseau homothétique qui est aussi conjugué, et le réseau conjugué de (S) qui correspond à un réseau conjugué sur (S_1) corres-

pond aussi à un réseau conjugué sur (S'_1). Imaginons que le rapport d'homothétie croisse indéfiniment : le point M'_1 homothétique de M_1 s'éloigne à l'infini, la droite MM'_1 devient la parallèle menée par M au rayon OM_1. Donc, *si l'on a deux surfaces* (S), (S_1) *se correspondant par plans tangents parallèles, si on prend dans l'espace un point fixe* O, *et si par le point* M *de* (S) *on mène la parallèle* MN *au rayon* OM_1, *les développables de la congruence des droites* MN *découpent sur* (S) *le réseau conjugué qui correspond à un réseau conjugué sur* (S_1). Si en particulier nous prenons pour (S_1) une sphère, pour O son centre, OM_1 est perpendiculaire au plan tangent à (S_1), et par conséquent au plan tangent à (S) : MN qui lui est parallèle est la normale à (S). *La congruence des normales à une surface a des développables qui déterminent sur cette surface un réseau conjugué orthogonal.* On retrouve donc la propriété fondamentale des lignes de courbure de la surface (S).

Remarquons encore que, si le rayon de la sphère (S_1) est égal à 1, les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont les cosinus directeurs de la normale, et les formules (1), (2) ne sont autres que les formules d'Olinde Rodrigues [Ch. V, § 3] : — L et — M sont alors les courbures principales.

Surfaces isothermiques

5. — On est conduit à une classe importante de surfaces, en cherchant dans quel cas la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces (S) et (S_1) fournit une représentation conforme de l'une des surfaces sur l'autre [ch. II, § 2]. Supposons les deux surfaces rapportées aux systèmes conjugués homologues, comme au paragraphe précédent; de sorte que la correspondance entre elles satisfait aux équations (1) et (2) de ce paragraphe :

$$(1) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = L\frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial x}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial y}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \mu} = M\frac{\partial z}{\partial \mu},$$

où figurent les coordonnées cartésiennes rectangulaires des points homologues. Soit

$$ds^2 = E d\lambda^2 + 2F d\lambda d\mu + G d\mu^2$$

l'élément linéaire de la surface (S), de sorte que

$$(3)\qquad E=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2,\qquad F=\Sigma\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu},\qquad G=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2.$$

La condition qui exprime que la correspondance considérée réalise une représentation conforme est qu'il existe une fonction $k(\lambda, \mu)$ telle que

$$(4)\qquad dx^2{}_1+dy^2{}_1+dz^2{}_1=k^2ds^2.$$

En tenant compte des formules (1), (2), (3), elle se traduit par les équations :

$$(5)\qquad (L^2-k^2)\,E=(LM-k^2)\,F=(M^2-k^2)\,G=0.$$

1° Ecartons les cas ($E=0$, $F=0$); ($F=0$, $G=0$) où la surface (S) serait une développable isotrope [ch. III, § 4]. Nous pouvons supposer d'abord $E=0, G=0$; de sorte que les lignes coordonnées sont, sur (S) et sur (S_1), les lignes minima. Comme elles sont conjuguées par hypothèse, les directions asymptotiques sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes du plan tangent, et sont rectangulaires : donc l'indicatrice est une hyperbole équilatère, et la surface, (S) comme (S_1), est une surface minima.

Réciproquement, les équations données au chapitre III, § 6, page 50, pour représenter une surface minima quelconque, entraînent les formules :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} d(x+iy)&=-u^2F'''(u)du-v^2G'''(v)dv,\\ d(x-iy)&=F'''(u)du+G'''(v)dv,\\ dz&=-uF'''(u)du-vG'''(v)dv.\end{aligned}\right.$$

Donc, pour deux surfaces (S) et (S_1) représentées ainsi, avec les fonctions F, G ; F_1, G_1 respectivement, on aura les identités, de la forme (1), (2) et (5),

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\frac{F'''_1}{F'''}\cdot\frac{\partial x}{\partial u},\qquad \frac{\partial y_1}{\partial u}=\frac{F'''_1}{F'''}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u}=\frac{F'''_1}{F'''}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{G'''_1}{G'''}\cdot\frac{\partial x}{\partial v},\qquad \frac{\partial y_1}{\partial v}=\frac{G'''_1}{G'''}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},\qquad \frac{\partial z_1}{\partial v}=\frac{G'''_1}{G'''}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$ds^2{}_1=\frac{F'''_1G'''_1}{F'''G'''}\cdot ds^2.$$

Ainsi *deux surfaces minima quelconques se correspondent par plans tangents parallèles de manière que cette correspondance soit une représentation conforme.*

2° Supposons maintenant que F ne soit pas nul, et que E et G ne soient pas nuls tous deux : la condition $LM = k^2$ étant alors jointe à l'une des conditions $L^2 = k^2$, $M^2 = k^2$, entraîne, L et M ne pouvant être nuls,

$$L = M, \qquad k^2 = L^2 = M^2.$$

On en conclut, en supposant, ce qui est loisible alors, $k = L$,

$$(7) \qquad dx_1 = k\,dx, \qquad dy_1 = k\,dy, \qquad dz_1 = k\,dz.$$

Or deux au moins des fonctions x, y, z de λ et μ sont indépendantes : supposons que ce soit, par exemple, x et y. Les deux premières identités (7) expriment que la correspondance entre (S) et (S_1) se traduira par des formules

$$x_1 = \varphi(x), \qquad y_1 = \psi(y), \qquad k = \varphi'(x) = \psi'(y),$$

où x et y peuvent être considérées comme des variables indépendantes. On en conclut que k est une constante, puisqu'il ne dépend ni de x, ni de y ; et les formules (7) donnent alors

$$x_1 = kx + a, \qquad y_1 = ky + b, \qquad z_1 = kz + c,$$

a, b, c étant trois constantes. Nous trouvons ainsi la solution évidente, où (S) est une surface arbitraire, et (S_1) une homothétique quelconque de (S).

3° Il reste à examiner le cas où F est nul, sans que ni E, ni G le soient. Les conditions (5) donnent alors :

$$F = 0, \qquad L = -M = k,$$

en écartant l'hypothèse $L = M$, déjà rencontrée. Nous devons donc examiner ce que sont deux surfaces (S) et (S_1), liées par les conditions :

$$(8) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = k\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = k\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = k\frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$(9) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = -k\frac{\partial x}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = -k\frac{\partial y}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \mu} = -k\frac{\partial z}{\partial \mu},$$

et

$$(10) \qquad F = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0.$$

Eliminons x_1, y_1, z_1 en différentiant les équations (8) par rapport

à μ, les équations (9) par rapport à λ. et retranchant membre à membre. Nous trouvons ainsi que x, y, z satisfont à une même équation de la forme :

$$(11) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(k\,\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(k\,\frac{\partial\omega}{\partial\mu}\right) \equiv 2k\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda\partial\mu} + \frac{\partial k}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + \frac{\partial k}{\partial\lambda}\frac{\partial\omega}{\partial\mu}.$$

Or, en différentiant les équations (3), nous obtenons les identités :

$$(12) \qquad 2\Sigma\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu} = \frac{\partial E}{\partial\mu}, \qquad 2\Sigma\frac{\partial x}{\partial\mu}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu} = \frac{\partial G}{\partial\lambda};$$

en y remplaçant $2\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}$, $2\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\partial\mu}$, $2\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\partial\mu}$ en fonction des dérivées premières. au moyen des identités qui résultent de (11) quand on y remplace ω par x, y, z ; et en tenant compte des formules (3) et de la condition (10), ces identités (12) deviennent :

$$-E\frac{\partial k}{\partial\mu} = k\frac{\partial E}{\partial\mu}, \quad -G\frac{\partial k}{\partial\lambda} = k\frac{\partial G}{\partial\lambda};$$

Donc E et G sont de la forme :

$$E = \frac{1}{k}\varphi(\lambda), \qquad G = \frac{1}{k}\psi(\mu);$$

et l'élément linéaire de (S) prend la forme :

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{1}{k}\left[\varphi(\lambda)d\lambda^2 + \psi(\mu)d\mu^2\right].$$

Nous pourrons, sans changer les formules (8) et (9), remplacer la coordonnée λ par une fonction de λ, et μ par une fonction de μ ; et disposer de ce changement de coordonnées de manière à réduire la formule (13) à la forme :

$$(14) \qquad ds^2 = \frac{1}{k}(d\lambda^2 + d\mu^2),$$

où nous gardons les notations λ, μ pour désigner les coordonnées nouvelles λ', μ' définies par

$$d\lambda' = \sqrt{\varphi(\lambda)}.d\lambda, \qquad d\mu' = \sqrt{\psi(\mu)}.d\mu.$$

En vertu de la formule (4), l'élément linéaire de (S_1) sera réduit lui-même à la forme :

$$(15) \qquad ds_1^2 = k(d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Le système des courbes coordonnées, qui forme, par hypothèse, un réseau conjugué, sur (S) et sur (S_1), forme aussi un réseau orthogonal, en vertu de l'hypothèse $F = 0$: c'est donc le système des lignes de courbure, sur l'une et l'autre surface. Mais, de plus, il forme, d'après les formules (14) et (15), un système orthogonal isotherme [ch. IV, § 4]. *Les deux surfaces peuvent donc être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure* : on dit, pour exprimer cette propriété, que ce sont des *surfaces isothermiques. Une surface isothermique est* donc *une surface qui, rapportée à ses lignes de courbure, a un* ds^2 *de la forme* (13).

$$ds^2 = K[\varphi(\lambda)d\lambda^2 + \psi(\mu)d\mu^2].$$

Réciproque. — Donnons-nous, inversement, une surface isothermique (S) quelconque : supposons-la rapportée à ses lignes de courbure, de sorte que son ds^2 est de la forme (14). Nous avons les conditions :

$$(16) \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 = \frac{1}{k}, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 = \frac{1}{k},$$

en même temps que la condition $F' = 0$, qui exprime que les lignes coordonnées sont conjuguées :

$$(17) \qquad 0 = \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}\cdot\frac{\partial(y, z)}{\partial(\lambda, \mu)} \equiv \Sigma A\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}.$$

En différentiant les équations (16), nous obtenons :

$$(18) \qquad \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial\mu}, \qquad \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}\cdot\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial\lambda};$$

et des équations (17) et (18) nous tirons les valeurs des dérivées secondes $\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}, \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\partial\mu}, \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\partial\mu}$. Les trois directions :

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial\lambda}; \qquad \frac{\partial x}{\partial\mu}, \frac{\partial y}{\partial\mu}, \frac{\partial z}{\partial\mu}; \qquad A, B, C$$

formant un trièdre trirectangle direct, nous introduisons leurs cosinus directeurs, qui sont :

$$\sqrt{k}\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \sqrt{k}\frac{\partial y}{\partial\lambda}, \sqrt{k}\frac{\partial z}{\partial\lambda}; \sqrt{k}\frac{\partial x}{\partial\mu}, \sqrt{k}\frac{\partial y}{\partial\mu}, \sqrt{k}\frac{\partial z}{\partial\mu}; kA, kB, kC;$$

puisque $E = G = \frac{1}{k}$, $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \frac{1}{k^2}$. Et, pour

obtenir $\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu}$ par exemple, il suffit de multiplier les équations (17) et (18), respectivement, par k^2A, $k\frac{\partial x}{\partial\lambda}$, $k\frac{\partial x}{\partial\mu}$ et d'ajouter ; ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu} = \frac{1}{2}k\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{1}{2}k\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial\mu},$$

c'est-à-dire :

$$2k\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial\mu} + \frac{\partial k}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial k}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0.$$

Donc x, y, z satisfont bien à la même équation (11). Or c'est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (8) et (9), en x_1, y_1, z_1 soient compatibles : on peut donc calculer x_1, y_1, z_1 par la quadrature des différentielles totales :

$$(19)\quad dx_1 = k\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda - \frac{\partial x}{\partial\mu}d\mu\right),\qquad dy_1 = k\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda - \frac{\partial y}{\partial\mu}d\mu\right),$$
$$dz_1 = k\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}d\lambda - \frac{\partial z}{\partial\mu}d\mu\right).$$

La surface (S_1) est ainsi définie, et son ds^2 est alors donné par la formule (15) ; c'est-à-dire qu'elle est elle-même isothermique, et rapportée à ses lignes de courbure. Car, d'après les formules (1), les lignes coordonnées sont conjuguées sur les deux surfaces ; et, d'après (15), elles sont orthogonales et isothermes pour (S_1).

Donc, *étant donnée une surface isothermique quelconque, qui, rapportée à ses lignes de courbure, à le* ds^2 *donné par* (14), *il lui correspond, à une translation arbitraire près, une autre surface isothermique et une seule, telle que la correspondance établie par plans tangents parallèles entre les points de ces deux surfaces soit une représentation conforme de l'une de ces surfaces sur l'autre ; dans cette correspondance, les lignes de courbure des deux surfaces se correspondent ; et le* ds^2 *de la seconde est donné par la formule* (15). *Il y a réciprocité entre les deux surfaces.*

Remarque. — Les calculs précédents montrent que, pour qu'une surface soit isothermique, il faut et il suffit que les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque de la surface satisfassent, en même temps qu'à la condition $F = 0$, à une même équation aux dérivées partielles de la forme (11). Cette équation ne change pas de forme par un changement de variables de la forme

$$(20)\qquad \lambda' = \varphi(\lambda),\qquad \mu' = \psi(\mu).$$

Mais on peut la simplifier, en posant :

(21) $$\omega' = \omega.\chi(\lambda, \mu),$$

et déterminant convenablement le facteur χ. Elle devient, en effet,

$$\frac{\partial^2\omega'}{\partial\lambda\partial\mu} + \left[\frac{1}{2k}\frac{\partial k}{\partial\mu} - \frac{1}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\right]\frac{\partial\omega'}{\partial\lambda} + \left[\frac{1}{2k}\cdot\frac{\partial k}{\partial\lambda} - \frac{1}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\omega'}{\partial\mu} - \theta.\omega' = 0,$$

et il suffit de prendre :

(22) $$\chi = \sqrt{k}$$

pour la réduire à la forme :

(23) $$\frac{\partial^2\omega'}{\partial\lambda\partial\mu} = \theta\omega'.$$

L'expression de θ, en λ et μ, se déduit du fait que, $\omega = 1$ étant solution de l'équation (11), $\omega' = \chi = \sqrt{k}$ est solution de (23) ; donc :

(24) $$\theta = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial^2\sqrt{k}}{\partial\lambda\partial\mu}.$$

Dire que l'équation (11) est vérifiée par les coordonnées cartésiennes x, y, z, 1, équivaut à dire que l'équation (23) est vérifiée par les coordonnées homogènes :

$$X = x\sqrt{k}, \quad Y = y\sqrt{k}, \quad Z = z\sqrt{k}, \quad T = \sqrt{k}.$$

Donc : *pour qu'une surface soit isothermique, il faut et il suffit que, pour un système de coordonnées homogènes* X, Y, Z, T *convenablement choisi, les quatre coordonnées d'un point quelconque de la surface, supposée rapportée à ses lignes de courbure, satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme* (23) ; *l'élément linéaire de la surface est alors :*

$$ds^2 = \frac{1}{T^2}(d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Exemples de surfaces isothermiques

1° Toute *surface de révolution*

$$x = u\cos\mu, \qquad y = u\sin\mu, \qquad z = \varphi(u)$$

est isothermique ; car elle est ainsi rapportée à ses lignes de courbure, et son élément linéaire :

$$ds^2 = [1 + \varphi'^2(u)]du^2 + u^2d\mu^2$$

est de la forme (13).

La *sphère* est, par suite, isothermique d'une infinité de manières.

2° Les *cônes* et les *cylindres* dont les éléments linéaires (1) et (2), donnés au Ch. V, § 4, p. 91, se rapportent à leurs lignes de courbure, sont aussi, d'après la forme de ces éléments linéaires :

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \qquad ds^2 = u^2\left[\frac{1}{u^2}\,du^2 + dv^2\right],$$

des surfaces isothermiques.

3° Les *surfaces du second degré* sont isothermiques. Nous le vérifierons pour l'hyperboloïde à une nappe, en nous servant des formules du paragraphe précédent. Les formules (6) [§ 4] donnent, à cet effet,

$$(u-v)^4\, ds^2 = (a^2+b^2)\,[\Phi(v^2)du^2 - 2\Phi_0(u^2, v^2)dudv + \\ + \Phi(u^2, dv^2] + 4c^2(u-v)^2 dudv.$$

Introduisons les paramètres des lignes de courbure, définies par (7) [§ 4] en posant :

$$(25) \qquad \frac{du}{\sqrt{\Phi(u^2)}} - \frac{dv}{\sqrt{\Phi(v^2)}} = d\lambda, \qquad \frac{du}{\sqrt{\Phi(u^2)}} + \frac{dv}{\sqrt{\Phi(v^2)}} = d\mu;$$

et le ds^2 deviendra :

$$(26) \quad ds^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)\sqrt{\Phi(u^2)}\sqrt{\Phi(v^2)}\,[E_0 d\lambda^2 + G_0 d\mu^2].(u-v)^{-2},$$

avec :

$$(u-v)^2.E_0 = \sqrt{\Phi(u^2)}\sqrt{\Phi(v^2)} + \Phi_0(u^2, v^2) - \frac{2c^2}{a^2+b^2}(u-v)^2,$$

$$(u-v)^2.G_0 = \sqrt{\Phi(u^2)}\sqrt{\Phi(v^2)} - \Phi_0(u^2, v^2) + \frac{2c^2}{a^2+b^2}(u-v)^2.$$

Or, à cause de la forme (9) [§ 4] de l'intégrale de l'équation d'Euler (7) [§ 4], $E_0 =$ const. définit les mêmes lignes de courbure que $\mu =$ const. ; donc E_0 est fonction de μ seul ; et, de même, G_0 est fonction de λ seul. Donc le ds^2 (26) se ramène à la forme (13), caractéristique pour les surfaces isothermiques, en mettant en facteur E_0G_0.

4° Nous trouverons une nouvelle classe de surfaces isothermiques en cherchant les couples de surfaces parallèles (S) et (S_1) sur lesquelles les normales communes déterminent une correspondance conforme. Il suffit pour cela, en désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à S, de supposer que, dans les formules (8), 9,

$$x_1 = x + hl, \qquad y_1 = y + hm, \qquad z_1 = z + hn,$$

où h est une longueur constante. D'après les formules d'Olinde

Rodrigues [Ch. V, § 3], R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de (S), on a :

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial m}{\partial \lambda} = -\frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial n}{\partial \lambda} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial z}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{1}{R_2}\frac{\partial x}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial m}{\partial \mu} = -\frac{1}{R_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial n}{\partial \mu} = -\frac{1}{R_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu}.$$

Donc :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = \left(1 - \frac{h}{R_1}\right)\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \ \ldots, \ \ldots; \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \left(1 - \frac{h}{R_2}\right)\frac{\partial x}{\partial \mu}, \ \ldots, \ \ldots;$$

et, pour qu'on puisse identifier ces formules avec les formules (8) et (9), il faut et il suffit que l'on ait :

$$\left(1 - \frac{h}{R_1}\right) + \left(1 - \frac{h}{R_2}\right) = 0$$

ou :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{h}; \tag{26}$$

c'est-à-dire que la courbure moyenne de (S) soit constante. Il en est de même de celle de (S_1), et elle est égale et opposée à celle de (S) : cela est évident *a priori*, à cause de la symétrie de la relation entre (S) et (S_1); et on constate sans peine que l'égalité :

$$\frac{1}{R_1 - h} + \frac{1}{R_2 - h} = -\frac{2}{h}$$

est équivalente à (26). Remarquons encore que les centres de courbure principaux, communs à (S) et (S_1), sont conjugués harmoniques par rapport aux pieds de la normale commune sur les deux surfaces.

On trouve ainsi un moyen de déduire de toute surface à courbure moyenne constante $\frac{1}{h}$ une surface à courbure moyenne constante $\frac{-1}{h}$.

Ainsi : *toute surface à courbure moyenne constante est isothermique.*

5° La conclusion précédente n'est plus justifiée si la courbure moyenne est nulle, c'est-à-dire si (S) est une surface minima, car h devrait alors être infini. Mais il est facile de vérifier directement que *toute surface minima est isothermique.*

Reprenons, à cet effet, les formules (6) : la direction l, m, n de la normale est définie par la condition :

$$(l - im)\,d(x + iy) + (l + im)\,d(x - iy) + 2n\,dz = 0,$$

d'où on tire :

$$(27) \qquad l + im = 2uv, \qquad l - im = -2, \qquad n = u + v.$$

La condition pour que la normale rencontre la normale infiniment voisine s'écrit ensuite :

$$0 = \begin{vmatrix} l & dl & dx \\ m & dm & dy \\ n & dn & dz \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} l + im & d(l + im) & d(x + iy) \\ l - im & d(l - im) & d(x - iy) \\ n & dn & dz \end{vmatrix}.$$

En y portant les valeurs (6) et (27), on obtient donc l'équation différentielle des lignes de courbure, qui se réduit à :

$$(28) \qquad F'''du^2 + G'''dv^2 = 0.$$

D'autre part, le ds^2 est, d'après les formules (6),

$$(29) \quad ds^2 = d(x + iy)\,d(x - iy) + dz^2 = -(u - v)^2 F'''G'''.dudv.$$

Pour y introduire les paramètres λ, μ des lignes de courbure, il suffit de poser :

$$\sqrt{F'''}.du - \sqrt{G'''}.dv = d\lambda, \qquad \sqrt{F'''}.du + \sqrt{G'''}.dv = d\mu,$$

et il vient :

$$ds^2 = \frac{(u - v)^2}{4\sqrt{F'''}\sqrt{G'''}}(d\lambda^2 - d\mu^2),$$

ce qui est bien de la forme isothermique.

Emploi des coordonnées pentasphériques

6. — Pour que des équations

$$(1) \qquad x = f(\lambda, \mu), \qquad y = g(\lambda, \mu), \qquad z = h(\lambda, \mu)$$

représentent une surface rapportée à ses lignes de courbure, il faut et il suffit, d'après ce qu'on a vu, que ces fonctions satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial\lambda\partial\mu} + L\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + M\frac{\partial\omega}{\partial\mu} = 0,$$

en même temps qu'à la condition d'orthogonalité :

$$(3)\qquad 0 = F = \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu}.$$

On peut remplacer cette condition par une autre, de la manière suivante. Désignons, pour abréger, par $\Omega(\omega)$ le premier membre de (2), et nous aurons l'identité :

$$\frac{1}{2}\Omega(x^2 + y^2 + z^2) = x\Omega(x) + y\Omega(y) + z\Omega(z) + F.$$

On en conclut, puisque $\Omega(x)$, $\Omega(y)$, $\Omega(z)$ sont nuls, que la condition (3) équivaut à $\Omega(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Donc, *pour que les équations* (1) *représentent une surface rapportée à ses lignes de courbure, il faut et il suffit que les quatre fonctions* x, y, z *et* $(x^2 + y^2 + z^2)$ *satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme* (2).

Cela équivaut manifestement *à dire que* 1, x, y, z, $(x^2 + y^2 + z^2)$ *satisfont à une même équation aux dérivées partielles de la forme plus générale :*

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda\partial\mu} + L\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + M\frac{\partial\omega}{\partial\mu} + N\omega = 0.$$

Introduisons les combinaisons :

$$(5)\qquad u = \frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{2}, \qquad v = \frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{2i};$$

et désignons sous le nom de *coordonnées pentasphériques* d'un point, de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z, les cinq quantités :

$$(6)\qquad x_1 = mx, \quad x_2 = my, \quad x_3 = mz, \quad x_4 = mu, \quad x_5 = mv,$$

où m est un facteur de proportionnalité arbitraire ; elles sont liées par la relation :

$$(7)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

Réciproquement, si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont cinq nombres liés par la condition (7), on tire des équations (6), en remarquant que $u + iv = 1$,

$$(8)\qquad m = x_4 + ix_5, \qquad x = \frac{x_1}{m}, \qquad y = \frac{x_2}{m}, \qquad z = \frac{x_3}{m},$$

et la condition (7) donne :

$$x_4 - ix_5 = -m(x^2 + y^2 + z^2) = m(u - iv);$$

on a donc :

$$x_4 + ix_5 = m(u + iv), \qquad x_4 - ix_5 = m(u - iv),$$

et les dernières équations $x_4 = mu$, $x_5 = mv$ sont vérifiées. Donc cinq nombres liés par l'équation (7) sont coordonnées pentasphériques d'un point.

Cela posé, comme l'équation (4) se transforme en une équation de même forme si on y fait le changement de variable $\omega' = \omega.\chi(\lambda, \mu)$, le résultat énoncé plus haut peut se traduire ainsi :

Pour que les équations (1) *représentent une surface rapportée à ses lignes de courbure, il faut et il suffit que les cinq coordonnées pentasphériques d'un point de cette surface satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme* (4).

Toute combinaison linéaire homogène, à coefficients constants, de plusieurs intégrales de (4) en est encore une intégrale. Donc le même résultat subsiste, si on substitue aux coordonnées pentasphériques, précédemment définies, les *coordonnées pentasphériques générales* qui s'en déduisent par une *transformation linéaire et homogène orthogonale* quelconque.

$$(9) \qquad x'_h = \sum_{k=1}^{5} \alpha_{hk} x_k \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dire que cette transformation est orthogonale signifie qu'elle laisse *invariante* la forme quadratique $\sum_{h=1}^{5} x^2_h$; c'est-à-dire que les équations (9) entraînant l'identité :

$$(10) \qquad \sum_{h=1}^{5} x'^2_h = \sum_{h=1}^{5} x_h^2.$$

Ces transformations orthogonales possèdent des propriétés toutes semblables à celles des transformations analogues à trois variables, c'est-à-dire des changements de coordonnées rectangulaires (sans déplacement d'origine).

L'identité (10) équivaut aux *conditions d'orthogonalité* :

$$(11) \qquad \sum_{h=1}^{5} \alpha_{hk}^2 = 1, \qquad \sum_{h=1}^{5} \alpha_{hk}\alpha_{hk'} = 0 \qquad (k \neq k' = 1, 2, 3, 4, 5) ;$$

d'où l'on déduit, par combinaison des équations (9), les formules inverses équivalentes :

$$(12) \qquad x_k = \sum_{h=1}^{5} \alpha_{hk} x'_h \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5),$$

qui satisfont aux conditions d'orthogonalité analogues à (11), puisque

l'identité (10) ne cesse pas d'avoir lieu ; les conditions d'orthogonalité ainsi obtenues :

$$(13)\qquad \sum_{k=1}^{5} \alpha_{hk}^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{5} \alpha_{hk}\alpha_{h'k} = 0 \qquad (h \neq h' = 1, 2, 3, 4, 5)$$

sont donc équivalentes aux conditions (11).

En élevant au carré le déterminant $\Delta = |\alpha_{hk}|$ des formes (9), on voit qu'il est égal à ± 1 ; et, en choisissant convenablement les notations, c'est-à-dire l'ordre dans lequel sont numérotées ces cinq formes linéaires, on pourra supposer qu'il est égal à 1. Alors l'identification des formules (12) avec celles que donne l'application de la règle de Cramer aux équations (9), donne encore l'égalité entre les éléments de Δ et les mineurs correspondants :

$$(14)\qquad \alpha_{hk} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{hk}} \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Interprétation des coordonnées pentasphériques générales. — Il résulte immédiatement des formules de définition (6) que *toute équation linéaire homogène :*

$$(15)\qquad 0 = \sum_{h=1}^{5} a_h x_h \equiv \frac{-m}{2} [(a_4 + ia_5)(x^2 + y^2 + z^2) - $$
$$- 2a_1 x - 2a_2 y - 2a_3 z - (a_4 - a_5 i)]$$

représente une sphère, et réciproquement. Nous pouvons supposer les coefficients a_h, qui ne sont définis qu'à un facteur près, choisis de manière à satisfaire à la condition d'orthogonalité :

$$(16)\qquad \Sigma a_h^2 = 1.$$

Nous dirons alors que a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont les *coordonnées de la sphère.*

On constate immédiatement que le rayon R de cette sphère est donné par :

$$R^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + (a_4 + ia_5)(a_4 - ia_5)}{(a_4 + ia_5)^2} = \frac{1}{(a_4 + ia_5)^2}.$$

On prendra, par exemple, et cela revient à disposer du signe $\pm$, laissé arbitraire par la condition (16),

$$(17)\qquad R = \frac{1}{a_4 + ia_5}.$$

La puissance du point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, par rapport à la sphère considérée, a donc pour expression :

$$(18)\qquad P_x = -\frac{2R}{m} \cdot \sum_{h=1}^{5} a_h x_h.$$

Considérons maintenant une seconde sphère, définie, de même par ses coordonnées b_h ($h = 1, 2, 3, 4, 5$), et de rayon R'. L'angle V des deux sphères est donné par :

$$2RR'\cos V = \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_4 - ia_5)(b_4 + ib_5) + (b_4 - ib_5)(a_4 + ia_5)}{(a_4 + ia_5)(b_4 + ib_5)},$$

d'où :

$$\cos V = \sum_{h=1}^{5} a_h b_h. \tag{19}$$

Ce cosinus est donc défini sans ambiguité, dès qu'on se donne les signes des rayons des deux sphères. On remarquera l'analogie de ces formules (16) et (19) avec celles qui concernent les *directions*, dans la géométrie cartésienne, à coordonnées rectangulaires.

Cela posé, l'interprétation des coordonnées (9) est immédiate. Les équations $x'_h = 0$ ($h = 1, 2, 3, 4, 5$) définissent cinq sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), (S_5), ayant pour coordonnées les coefficients des seconds membres des équations (9) correspondantes. Ces sphères sont orthogonales deux à deux, d'après les conditions (11) : elles constituent ce qu'on appelle un *pentasphère orthogonal*, qui sert de *pentasphère de référence* pour la définition des coordonnées (9). *Les coordonnées pentasphériques* (9) *sont* elles-mêmes, d'après la formule (18), *proportionnelles aux quotients obtenus en divisant les puissances du point* M *considéré par rapport aux cinq sphères de référence par les rayons respectifs de ces sphères.*

En voici une autre interprétation qui nous sera utile. Soit M le point considéré, et supposons que ses coordonnées x'_1 et x'_2 ne soient pas nulles toutes deux, c'est-à-dire qu'il ne soit pas un point commun aux sphères (S_1) et (S_2). Nous pouvons alors déterminer une sphère et une seule, (S), passant par M et coupant à angle droit les sphères (S_3) (S_4) (S_5) ; car les coordonnées b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 de (S) seront définies par les conditions :

$$\sum_{h=1}^{5} b_h x_h = 0, \qquad \sum_{h=1}^{5} b_h \alpha_{3h} = 0, \qquad \sum_{h=1}^{5} b_h \alpha_{4h} = 0, \qquad \sum_{h=1}^{5} b_h \alpha_{5h} = 0. \tag{20}$$

Ces équations, en b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, sont indépendantes, sans quoi on aurait :

$$x_h = \lambda_3\alpha_{3h} + \lambda_4\alpha_{4h} + \lambda_5\alpha_{5h} \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5),$$

et par suite, à cause des conditions d'orthogonalité, $x'_1 = x'_2 = 0$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Désignons alors par V_1 et V_2 les angles que (S) fait avec (S_1) et (S_2) : ils sont définis par les formules :

$$(21)\qquad \cos V_1 = \sum_{h=1}^{5} b_h \alpha_{1h}, \qquad \cos V_2 = \sum_{h=1}^{5} b_h \alpha_{2h},$$

qui entraînent, en tenant compte de $\Sigma b_h^2 = 1$, et des conditions d'orthogonalité (13), la condition :

$$(22)\qquad \cos^2 V_1 + \cos^2 V_2 = 1 ;$$

de sorte que les deux angles V_1 et V_2 sont complémentaires. Une relation suffit donc pour les déterminer : on l'obtient en éliminant les b_h entre les équations (20) et (21). En laissant d'abord de côté la première équation (20), on en tire :

$$(23)\qquad b_h = \alpha_{1h} \cos V_1 + \alpha_{2h} \cos V_2 \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5) :$$

et en portant ces valeurs dans l'équation $\Sigma b_h x_h = 0$, il vient :

$$(24)\qquad x'_1 \cos V_1 + x'_2 \cos V_2 = 0.$$

Les équations (22) et (24) déterminent cos V_1 et cos V_2 à un même facteur ($\pm$ 1) près : cela tient à l'indétermination que la définition de (S) laisse subsister sur le signe de son rayon. Mais, quel que soit le signe adopté, la formule (24) donne sans ambiguïté, en fonction de cos V_1 et cos V_2, le rapport des coordonnées x'_1 et x'_2.

On remarquera que, si x'_1, par exemple, est nul, la solution des équations (20) est donnée par $b_h = \alpha_{1h}$; c'est-à-dire que la sphère (S) est alors la sphère (S_1). Par suite, cos $V_1 = 1$, cos $V_2 = 0$, et la formule (24) donne $\frac{x'_1}{x'_2} = 0$, x'_2 étant, par hypothèse, différent de zéro.

Nous concluons donc que *les coordonnées pentasphériques d'un point*, qui ne sont définies qu'à un même facteur près, *sont entièrement déterminées par les cosinus des angles que les sphères passant par ce point, et orthogonales à trois sphères du pentasphère de référence, font avec les deux autres sphères de ce pentasphère.*

Remarque 1. — La sphère qui a pour coordonnées b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 dans le système initial x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de coordonnées pentasphériques, a, d'après les formules (12), pour équation, dans le système général (9) de coordonnées :

$$\sum_{h=1}^{5} \Big(\sum_{k=1}^{5} b_k \alpha_{hk}\Big) . x'_h = 0.$$

On dira que les quantités :

$$(29)\qquad b'_h = \sum_{k=1}^{5} b_h \alpha_{hk} \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5)$$

sont, dans le nouveau système, les coordonnées de la sphère. Il résulte des conditions d'orthogonalité (11) que de telles coordonnées satisfont encore à la condition d'orthogonalité, analogue à (16),

$$\sum_{h=1}^{5} b_h'^2 = 1.$$

La transformation des coordonnées des sphères se fait donc comme celle des coordonnées des points.

Il résulte encore des conditions d'orthogonalité (11) que la formule (19) qui donne l'angle de deux sphères, garde la même forme en coordonnées pentasphériques générales.

Remarque 2. — Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre d'une sphère (S), R son rayon, P la puissance de l'origine par rapport à (S) : les cinq coordonnées pentasphériques de (S), définies par l'équation (15) et la condition $\Sigma a_k^2 = 1$, sont :

$$(30)\quad a_1 = \frac{x_0}{R}, \quad a_2 = \frac{y_0}{R}, \quad a_3 = \frac{z_0}{R}, \quad a_4 = \frac{1-P}{2R}, \quad a_5 = \frac{1+P}{2iR}.$$

On peut leur substituer six *coordonnées homogènes* $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, liées par la condition symétrique :

$$(31)\qquad \sum_{k=1}^{6} c_k^2 = 0.$$

Nous poserons, à cet effet, ρ étant un facteur arbitraire :

$$(32)\quad c_1 = \rho(1-P),\ c_2 = -\rho i(1+P),\ c_3 = 2\rho x_0,$$
$$c_4 = 2\rho y_0,\ c_5 = 2\rho z_0,\ c_6 = -2i\rho R.$$

Pour $c_6 = 0$, la sphère est de rayon nul, et c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 sont les coordonnées pentasphériques de son centre. Pour $c_6 \neq 0$, les formules (32) équivalent aux suivantes :

$$(33)\quad a_1 = \frac{c_3}{ic_6}, \quad a_2 = \frac{c_4}{ic_6}, \quad a_3 = \frac{c_5}{ic_6}, \quad a_4 = \frac{c_1}{ic_6}, \quad a_5 = \frac{c_2}{ic_6}.$$

On pourra employer des formules analogues à ces dernières pour passer des coordonnées pentasphériques générales d'une sphère, définies par les équations (29), à des coordonnées homogènes satisfaisant à la condition (31).

La formule (19) montre qu'une relation linéaire et homogène :

$$(34)\qquad \sum_{k=1}^{6} C_k c_k = 0,$$

où les C_k sont des constantes quelconques, exprime que la sphère (S) coupe la sphère (S′), de coordonnées homogènes :

$$(35)\quad c'_h = C_h \quad (h = 1, 2, 3, 4, 5), \quad c'_6 = i\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_5^2},$$

sous l'angle constant V, donné par la formule :

$$\cos V = \frac{C_6}{c'_6}. \tag{36}$$

Dans le cas où les constantes C_k vérifient la condition $\sum_{k=1}^{6} C_k^2 = 1$, on a $c'_6 = C_6$; les constantes C_k sont alors elles-mêmes les coordonnées de la sphère (S'), et la condition (34) exprime que les deux sphères (S) et (S') sont tangentes.

Remarque 3. — Dans le cas où la sphère (S) se réduit au plan $\lambda x + \mu y + \nu z - \delta = 0$, λ, μ, ν étant les cosinus directeurs d'une direction normale au plan, les coordonnées a_h sont :

$$a_1 = \lambda,\ a_2 = \mu,\ a_3 = \nu,\ a_4 = -\delta,\ a_5 = -i\delta \quad (a_4 + ia_5 = 0). \tag{37}$$

Remarque 4. — On peut passer directement du système de coordonnées x'_h relatif à un pentasphère orthogonal (Π), au système de coordonnées x''_h relatif à un autre pentasphère orthogonal (Π'). Des formules :

$$x_k = \sum_{h=1}^{5} \alpha_{hk} x'_h, \qquad x''_l = \sum_{k=1}^{5} \beta_{lk} x_k \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4, 5),$$

on conclut, en effet :

$$x''_l = \sum_{h=1}^{5} \cdot \left(\sum_{k=1}^{5} \alpha_{hk}\beta_{lk}\right) x'_h = \sum_{h=1}^{5} \beta'_{lh} x'_h \qquad (l = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{38}$$

Dans cette expression de la coordonnée x''_l les coefficients :

$$\beta'_{lh} = \sum_{k=1}^{5} \beta_{lk}\alpha_{hk} \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5),$$

sont encore les coordonnées de la nouvelle sphère de référence (S'_l) par rapport au premier pentasphère (Π). L'analogie avec les formules de transformation de coordonnées cartésiennes rectangulaires (sans déplacement d'origine) est manifeste.

Condition pour qu'une surface soit isothermique. — D'après ce qu'on a vu au § 5, pour que la surface considérée soit isothermique, il faut et il suffit que l'équation (4) puisse se ramener, par une transformation $\omega' = \omega.\chi(\lambda, \mu)$ à la forme de l'équation (23) de ce § 5. Donc, *pour que les équations* (1) *représentent une surface isothermique, rapportée à ses lignes de courbure, il faut et il suffit que les cinq coordonnées pentasphériques d'un point satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme* :

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda\partial\mu} = \theta(\lambda, \mu).\omega, \tag{39}$$

pour un choix convenable du facteur de proportionnalité qui figure dans ces coordonnées.

Remarque. — Un raisonnement, semblable à celui du début de ce paragraphe, peut se faire sur les coordonnées d'un plan tangent à la surface, supposé écrit sous la forme :

$$ax + by + cz + 1 = 0.$$

Les coefficients sont des fonctions de λ et μ ; et pour que la surface, définie comme enveloppe de ce plan, ait les lignes $\lambda =$ const., $\mu =$ const. pour lignes de courbure, il faut et il suffit que 1, a, b, c $(a^2 + b^2 + c^2)$ satisfassent à une même équation de la forme (4).

Application aux cyclides

7. — Désignons par x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les cinq coordonnées pentasphériques d'un point, dans un système quelconque de telles coordonnées. Une surface sera représentée par une équation homogène entre ces coordonnées. Nous avons vu que le cas où cette équation est du premier degré correspond aux sphères. Les surfaces représentées par une équation du second degré sont appelées *cyclides*.

Il résulte de la théorie des formes quadratiques que si :

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

est un polynôme du second degré, homogène, on peut toujours trouver une transformation linéaire homogène :

$$x_k' = \sum_{h=1}^{5} \alpha_{kh} x_h \qquad (k = 1_1, 2_1, \ldots, 5)$$

qui laisse invariante la forme Σx_h^2 et transforme Φ en

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{h=1}^{5} s_h x_h'^2.$$

Il existe donc un changement de coordonnées pentasphériques qui ramène l'équation de toute cyclide à la forme type :

$$\sum_{h=1}^{5} s_h x_h^2 = 0.$$

Écartant les cas particuliers où un ou plusieurs des s_h — (qui sont racines de l'équation en s obtenue en égalant à zéro le discriminant de $\Phi - s\sum_{h=1}^{5} x_h^2$) — seraient nuls, nous prendrons l'équation de la cyclide sous la forme

$$\sum_{h=1}^{5} \frac{x_h^2}{a_h} = 0,$$

et nous la considérons comme faisant partie de la famille de cyclides représentée par l'équation

$$(1)\qquad \sum_{h=1}^{5} \frac{x_h^2}{a_h - \sigma} = 0,$$

où σ est un paramètre arbitraire.

Les coordonnées x_h étant liées, par hypothèse, par la condition $\sum_{h=1}^{5} x_h^2 = 0$, cette équation (1) est, en σ, une équation du troisième degré, de sorte que, par chaque point de l'espace, passent trois cyclides de la famille : les paramètres σ_1, σ_2, σ_3 de ces trois cyclides sont ainsi des coordonnées curvilignes pour les points de l'espace. On calcule les x_h en fonction de σ_1, σ_2, σ_3 par le même mode de calcul qui sert pour le problème analogue relatif aux familles de quadriques homofocales. Posons :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{h=1}^{5}(\sigma - a_h),$$

et nous pourrons écrire l'identité

$$\sum_{h=1}^{5} \frac{x_h^2}{\sigma - a_h} = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{\varphi(\sigma)}.$$

en négligeant le facteur d'identification du second membre, puisque les x_h peuvent être calculés à un même facteur près. On a ici l'identité de décomposition du second membre, fraction rationnelle en σ, en éléments simples ; donc :

$$(2)\qquad x_h^2 = \frac{(a_h - \sigma_1)(a_h - \sigma_2)(a_h - \sigma_3)}{\varphi'(a_h)} \quad (h = 1, 2, .., 5).$$

Si on suppose σ_3 = constante, on a ainsi la représentation paramétrique d'une quelconque des surfaces (1).

Or si on pose, en général,

$$\omega = \sqrt{(a - \sigma_1)(a - \sigma_2)},$$

on a :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1} = \frac{\sigma_2 - a}{2\omega}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_2} = \frac{\sigma_1 - a}{2\omega},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} = \frac{1}{2\omega} - \frac{(\sigma_1 - a)(\sigma_2 - a)}{4\omega^3} = \frac{1}{4\omega};$$

d'où

$$(3)\qquad 2(\sigma_1 - \sigma_2)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_2} = 0.$$

C'est une équation de la forme (11) § 5 : il n'y a qu'à faire, en effet, $k = (\sigma_1 - \sigma_2)^{-1}$ dans cette équation (11), pour retrouver l'équation (3) actuelle. Celle-ci est donc bien réductible à la forme (39) § 6, par une transformation $\omega' = \omega\chi$.

Donc les coordonnées pentasphériques (2) de toute cyclide (1) satisfont bien à la condition énoncée ci-dessus ; et *les cyclides sont des surfaces isothermiqnes.*

Remarque 1. — Il est ainsi prouvé que les trois cyclides du système (1) qui passent en un point se coupent, deux à deux, suivant des lignes de courbure communes : elles se coupent donc à angle droit; et, par suite, deux quelconques de ces cyclides se coupent à angle droit tout le long de leur intersection.

Remarque 2. — Un calcul analogue s'applique aux quadriques homofocales

$$\sum_{h=1}^{3} \frac{x_h^2}{a_h - \sigma} - 1 = 0,$$

x_1, x_2, x_3 étant des coordonnées rectangulaires. On trouve

$$x_h^2 = \frac{(a_h - \sigma_1)\ (a_h - \sigma_2)(a_h - \sigma_3)}{\varphi'(a_h)}, \varphi(\sigma) = (\sigma - a_1)\ (\sigma - a_2)\ (\sigma - a_3).$$

Donc x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation (13). Reste à vérifier que $\sum_{h=1}^{3} x_h^2$ y satisfait aussi. Or la substitution de cette fonction dans le premier membre de (13) donne

$$(\sigma_1 - \sigma_2).\sum_{h=1}^{3} \frac{a_h - \sigma_3}{\varphi'(a_h)};$$

et l'identité

$$\frac{\sigma - \sigma_3}{\varphi(\sigma)} = \sum_{h=1}^{3} \frac{a_h - \sigma_3}{\varphi'(a_h)\ (\sigma - a_h)}$$

donne, quand on identifie, et qu'on exprime qu'il n'y a pas de terme en σ^2 dans le second membre,

$$\sum_{h=1}^{3} \frac{a_h - \sigma_3}{\varphi'(a_h)} = 0.$$

Application aux transformations conformes

8. — *Définitions.* — Considérons une transformation *ponctuelle* ; c'est-à-dire qui (comme le font les déplacements, les homothéties, les

inversions, par exemple) fait correspondre à tout point M de l'espace un point homologue M'. Elle est définie par ses équations :

$$(1) \qquad x' = f(x, y, z), \qquad y' = g(x, y, z), \qquad z' = h(x, y, z),$$

qui donnent les coordonnées (x', y', z') de M' en fonction des coordonnées (x, y, z) de M. On suppose qu'inversement à chaque point M' correspond un point M, c'est-à-dire que les équations (1) définissent des fonctions implicites :

$$(2) \quad x = \mathrm{F}(x', y', z'), \qquad y = \mathrm{G}(x', y', z'), \qquad z = \mathrm{H}(x', y', z').$$

Il suffit, pour cela, comme l'on sait, que f, g, h aient des dérivées partielles continues et que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)}$ ne soit pas nul identiquement.

A tout lieu de points M, la transformation fait correspondre un lieu homologue de points M' : à une courbe, une courbe ; à une surface, une surface. A deux courbes qui se coupent en M_0, elle fait correspondre deux courbes qui se coupent au point M'_0, homologue de M_0 ; à deux courbes tangentes en M_0, deux courbes tangentes en M'_0. De même pour une courbe et une surface ; et pour deux surfaces.

Cela résulte de ce qu'on déduit des équations (1), en les différentiant,

$$(3) \; dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \qquad dy' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz,$$

$$dz' = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz,$$

de sorte qu'à chaque *élément linéaire* $(x, y, z\,;\, dx, dy, dz)$, correspond un élément linéaire homologue $(x', y', z'\,;\, dx', dy', dz')$, qui est le même quelle que soit la courbe, passant en M, à laquelle appartient le premier élément. On dit que la transformation des éléments linéaires de l'espace, ainsi définie, résulte du *prolongement* de la transformation (1).

Le carré ds'^2 de l'élément linéaire transformé est, d'après les formules (3), une forme quadratique en dx, dy, dz, dont les coefficients sont fonctions de x, y, z ; soit :

$$(4) \qquad ds'^2 = \Phi(dx, dy, dz)\,;$$

et l'angle des deux éléments linéaires homologues de deux éléments linéaires d'un même point (x, y, z) — (que nous supposons correspon-

dre à deux différentiations différentes d et δ — est donné par la formule :

$$(5) \qquad \cos V' = \frac{\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial dx} \delta x}{\sqrt{\Phi(dx, dy, dz)} \sqrt{\Phi(\delta x, \delta y, \delta z)}}.$$

Cela posé, on dit que *la transformation* (1) *est une transformation conforme, si elle conserve les angles ;* c'est-à-dire si les homologues de deux courbes quelconques qui se coupent en M, font au point homologue M' un angle égal à celui que les deux premières font en M. Cela revient à dire que l'angle de deux éléments linéaires quelconques d'un même point M est égal à l'angle des éléments linéaires transformés.

S'il en est ainsi, à un angle droit correspond, en particulier, un angle droit, et par suite l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial dx} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial dy} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial dz} \delta z = 0$$

est une conséquence, quels que soient x, y, z, de l'équation :

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0.$$

On en conclut une identité de la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial dx} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial dy} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial dz} \delta z = 2k^2(x, y, z)(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z),$$

puisque ces deux équations sont homogènes et du second degré par rapport aux différentielles. Cette identité entraîne, dans le cas particulier $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, la suivante :

$$(6) \qquad \Phi(dx, dy, dz) = k^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Donc *toute transformation conforme entraîne une identité de la forme :*

$$(7) \qquad ds'^2 = k^2 . ds^2,$$

c'est-à-dire qu'elle transforme dans un rapport constant tous les éléments linéaires d'un même point, ce rapport k étant une fonction des coordonnées du point considéré.

Réciproquement, si une telle identité (7), ou (6), a lieu, la formule (5) se réduit à :

$$\cos V' = \frac{\Sigma dx \delta x}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}} = \cos V,$$

et la transformation est une transformation conforme.

La propriété précédente peut donc être prise comme définition des transformations conformes [Cf. Ch. II, § 2].

Recherche des transformations conformes. — En vertu de l'identité (7), toute transformation conforme change l'équation $ds^2 = 0$ en $ds'^2 = 0$; elle change donc toute courbe minima en une courbe minima ; et, par suite, toute développable isotrope, dont les courbes minima sont confondues, en une surface à courbes minima doubles, c'est-à-dire en une développable isotrope.

Cela posé, considérons une droite isotrope : on peut trouver, d'une infinité de manières, deux développables isotropes qui se touchent le long de cette droite ; les transformées se toucheront suivant une ligne minima commune, donc suivant une droite isotrope. Donc, toute droite isotrope a pour homologue une droite isotrope ; toute surface réglée isotrope devient une surface réglée isotrope ; et toute sphère, qui est doublement engendrée par des droites isotropes, se change en une surface doublement réglée, à génératrices isotropes, c'est-à-dire en une sphère.

Réciproquement, toute transformation ponctuelle qui change les sphères en sphères, change tout couple de droites isotropes, qu'on peut toujours considérer comme courbe d'intersection de deux sphères tangentes, en un couple de droites isotropes ; elle change donc les droites isotropes passant par un point M en droites isotropes passant par son homologue M' ; elle change, par suite, l'ensemble des éléments linéaires isotropes de ce point, caractérisé par l'équation $ds^2 = 0$, dans l'ensemble analogue, caractérisé par l'équation $ds'^2 = 0$. Elle donne donc lieu à une identité de la forme (7), et est une transformation conforme.

Les transformations conformes de l'espace à trois dimensions sont donc les transformations qui changent toute sphère en sphère.

Cela posé, soit (T) une transformation conforme ; et supposons les points M rapportés à un pentasphère orthogonal (π). La transformation (T) changeant les sphères en sphères, et conservant les angles, change ce pentasphère (π) en un autre pentasphère orthogonal (π'). Les coordonnées de l'homologue M' de M, prises par rapport à (π'), sont les mêmes que les coordonnées de M par rapport à (π). Car ces dernières coordonnées ne dépendent que des angles que les sphères menées par M, normalement à trois sphères de (π), font avec les deux autres sphères de (π) [Cf. page 225]. Et comme la transformation (T) n'altère pas les angles, elle n'altérera pas non plus les coordonnées du point par rapport au pentasphère, supposé transformé en même temps que lui.

Soient donc x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les coordonnées de M par rapport au

pentasphère (π), et $b_h = \beta_{kh}$ ($k = 1, 2, \ldots, 5$; $h = 1, 2, \ldots, 5$) les coordonnées, par rapport à (π), des sphères que la transformation (T) substitue, respectivement, aux sphères $x_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, 5$). Le point M′ a pour puissances, par rapport à ces sphères, des quantités proportionnelles aux coordonnées x_k de M, multipliées, respectivement, par leurs rayons R'_k. On a d'autre part, directement, pour ces mêmes produits [§ 6, formule (18)], des valeurs proportionnelles aux expressions : $R'_k . \sum_{h=1}^{5} \beta_{kh} x'_h$. Les formules de la transformation (T) peuvent donc s'écrire :

$$(8) \qquad x_k = \sum_{h=1}^{5} \beta_{kh} x'_h \; ; \qquad x'_k = \sum_{k=1}^{5} \beta_{kh} x_k \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, 5).$$

Donc les transformations conformes sont représentées, en coordonnées pentasphériques, par les transformations linéaires homogènes orthogonales. Elles forment, par conséquent, un groupe de ∞^{10} *transformations*, puisqu'il y figure vingt-cinq coefficients, liés par quinze relations indépendantes. Le mot de *groupe* indique que deux de ces transformations, effectuées successivement, donnent, comme résultat final, une autre transformation conforme, ce qui est évident *a priori*.

On démontre que chacune de ces transformations peut se décomposer en déplacements, homothéties et inversions.

Remarque. — Si nous comparons ces formules (8) avec les formules du changement de coordonnées pentasphériques, défini par la substitution au pentasphère de référence (π), du pentasphère (π'), homologue de (π) par la transformation (T), formules qui seraient [§ 6, équ. (38)] :

$$x'_k = \sum_{h=1}^{5} \beta_{kh} x_h,$$

nous voyons que les inversions correspondent, en coordonnées pentasphériques, aux changements de coordonnées, comme les déplacements aux changements de coordonnées rectangulaires de la géométrie cartésienne. L'analyse précédente donne la raison de cette analogie.

Transformations conformes du plan. — Les transformations ponctuelles d'un plan

$$(9) \qquad x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y)$$

se définissent, et se *prolongent* en transformations d'éléments linéaires (x, y ; dx, dy) comme celles de l'espace. Les *transformations conformes* sont encore définies par l'invariance des angles : et, en rai-

sonnant comme ci-dessus, on constate que cette invariance équivaut à l'invariance du ds^2, à un coefficient k^2 près. En développant cette identité :

$$df^2 + dg^2 = k^2(dx^2 + dy^2),$$

on obtient les conditions :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 = k^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = k^2.$$

On en conclut par l'identité de Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = \varepsilon k^2 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

ε étant égal à $+1$, ou à -1, comme il est facile de le vérifier, suivant que les angles homologues ont la même disposition, ou des dispositions contraires.

Quoi qu'il en soit, on a deux équations linéaires en $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, d'où on tire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\varepsilon\frac{\partial g}{\partial x};$$

ce qui équivaut à dire que $f + ig$, si $\varepsilon = +1$, $g + if$, si $\varepsilon = -1$, est fonction analytique de $x + iy$.

L'étude des transformations conformes du plan équivaut donc à la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Ces transformations dépendent d'une fonction arbitraire, et non plus comme dans le cas de l'espace, d'un certain nombre de constantes arbitraires. Il n'est plus exact que toute transformation conforme change tout cercle en cercle ; mais on peut chercher les transformations ponctuelles du plan qui changent tout cercle en cercle, comme nous avons cherché les transformations de l'espace qui changent toute sphère en sphère.

On introduira, à cet effet, des coordonnées *tétracycliques,* qui seront :

$$x_1 = mx, \quad x_2 = my, \quad x_3 = m\frac{1 - x^2 - y^2}{2}, \quad x_4 = m\frac{1 + x^2 + y^2}{2i};$$

et, plus généralement, des combinaisons de celles-là :

$$x'_h = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{hk}x_k \qquad (h = 1, 2, 3, 4),$$

définissant une transformation linéaire homogène orthogonale à

quatre variables. Et on trouvera que, en coordonnées tétracycliques quelconques, *les transformations qui changent tout cercle en cercle sont définies par les diverses transformations linéaires homogènes orthogonales à quatre variables.* On a ainsi un groupe de ∞^6 transformations, qu'on appelle le *groupe des rayons vecteurs réciproques,* parce que ses transformations peuvent se décomposer en déplacements, homothéties et inversions (ou transformations par rayons vecteurs réciproques).

Invariance des lignes de courbure et des réseaux isothermes. — Revenons au cas de l'espace : d'après une remarque déjà faite, si les coordonnées pentasphériques x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 d'un point d'une surface satisfont à une équation de la forme (4) § 6, les variables x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5 qu'on en déduit par une transformation linéaire homogène quelconque satisfont à la même équation. Donc si les équations (1) § 6 représentent une surface rapportée à ses lignes de courbure, il en sera de même des équations qui s'en déduisent par une transformation conforme quelconque.

En d'autres termes, *les transformations conformes laissent invariante la propriété d'une courbe d'une surface d'en être une ligne de courbure* [Cf. Ch. XI, § 6].

D'autre part, les transformations conformes, multipliant le ds^2, en un point M, par une fonction des coordonnées du point M, n'altèrent point la forme de ds^2 d'une surface qui caractérise les coordonnées orthogonales isothermes. Donc *les transformations conformes laissent invariante la propriété d'un réseau de courbes d'une surface d'être un réseau orthogonal et isotherme.*

On conclut de là que *les transformations conformes changent toute surface isothermique en surfaces isothermiques.* Cela résulterait aussi de la remarque faite pour les lignes de courbure ; l'équation (4) § 6, étant alors réductible à la forme :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda \partial \mu} = \omega . \theta(\lambda, \mu).$$

Remarque. — Les derniers résultats peuvent être établis, et complétés, sans calcul, par les considérations géométriques suivantes. D'après les remarques du Ch. VI, § 4, sur les lignes de courbure, toute ligne de courbure est un lieu de points M de la surface (S) considérée, tel qu'il soit possible d'associer à chacun de ces points une sphère tangente à (S), de manière que la sphère tangente en M à (S) soit aussi tangente, en ce point, à la sphère infiniment voisine. Il en résulte immédiatement que toute transformation ponctuelle qui change toute

sphère en sphère change, par là-même, toute ligne de courbure de (S) en une ligne de courbure de la surface homologue.

Réciproquement, toute transformation ponctuelle changeant toute ligne de courbure en ligne de courbure, change toute surface réglée isotrope, non développable et non sphérique, en une surface de même nature, car ces surfaces sont les seules dont les lignes de courbure soient doubles [Ch. III, § 7]. De plus, les lignes de courbure de ces surfaces étant leurs génératrices isotropes, et une droite isotrope pouvant être, d'une infinité de manières, considérée comme génératrice d'une telle surface, la transformation change toute droite isotrope en une droite isotrope ; et, par suite, comme nous l'avons vu plus haut, toute sphère en sphère. Donc *toute transformation ponctuelle qui change toute ligne de courbure en une ligne de courbure est une transformation conforme.*

D'autre part, toute transformation conforme, qui conserve les angles et les rapports des arcs infiniment petits issus d'un même point, transforme tout réseau de carrés infiniment petits, tracé sur une surface, en un semblable réseau, tracé sur la surface transformée. En d'autres termes, *toute transformation conforme change tout réseau orthogonal isotherme, tracé sur une surface, en un réseau orthogonal isotherme de la surface homologue.*

En combinant les deux résultats ainsi obtenus, on conclut que toute transformation conforme change toute surface isothermique en surface isothermique.

Réciproquement, *toute transformation ponctuelle qui change toute surface isothermique en une surface isothermique est une transformation conforme.* En effet, elle doit changer toute sphère en sphère, car la sphère (le plan étant considéré comme cas particulier de la sphère) est la seule surface qui soit isothermique d'une infinité de manières.

CHAPITRE IX

LES COMPLEXES DE DROITES ET LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

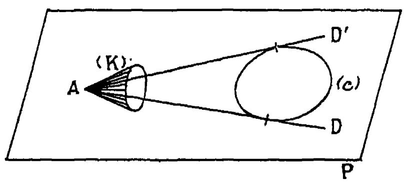
Eléments fondamentaux d'un complexe de droites

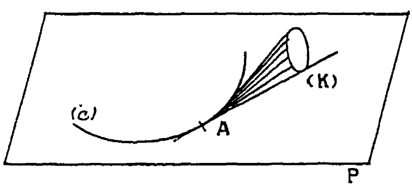
1. — On appelle *complexe* un système de ∞^3 droites, c'est-à-dire une famille de droites dépendant de trois paramètres.

Soit A un point de l'espace ; toutes les droites (D) du complexe qui passent par ce point sont au nombre de ∞^1, et constituent le *cône du complexe* attaché au point A : nous l'appellerons le cône (K).

Corrélativement : soit un plan (P), toutes les droites (D) du complexe situées dans ce plan sont au nombre de ∞^1, et enveloppent une courbe (C) qui est la *courbe du complexe* associée à (P). La tangente en tout point de cette courbe est une droite du complexe.

Plus généralement nous appellerons *courbe du complexe* une



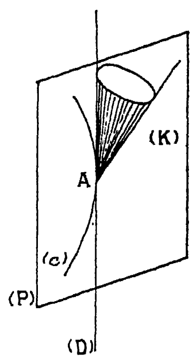


courbe (C) dont toutes les tangentes appartiennent au complexe. Considérons sur une telle courbe un point A, et le cône du complexe (K) associé au point A. Ce cône est tangent à la courbe (C). *Une courbe*

du complexe est une courbe tangente en chacun de ses points au cône du complexe associé à ce point.

Considérons un plan (P), et un point A de ce plan : cherchons les droites du complexe situées dans le plan (P) et passant par A. On peut les obtenir de deux manières : Considérons d'abord le cône du complexe associé au point A ; les droites cherchées sont les génératrices de ce cône situées dans le plan (P). Considérons, d'autre part, la courbe du complexe associée au plan (P) : les droites cherchées sont aussi les tangentes issues de A à cette courbe. Cela posé, cherchons dans le plan P le lieu des points A tels que deux des droites du complexe situées dans le plan (P) et passant par A soient confondues ; les points A correspondants sont, d'après ce qui précède, tels que le cône du complexe correspondant soit tangent au plan (P) ; et doivent aussi être sur la courbe du complexe. Les droites du complexe confondues coïncident avec la génératrice de contact du cône du complexe, et avec la tangente à la courbe du complexe. Ainsi *la courbe du complexe située dans un plan est le lieu des points de ce plan pour lesquels le cône du complexe est tangent au plan, et la génératrice de contact en un tel point est la tangente à la courbe.* La courbe du complexe est ainsi définie par points et par tangentes.

Considérons maintenant une droite (D) du complexe : prenons sur cette droite un point A, et considérons le cône (K) du complexe associé au point A ; soit (P) le plan tangent à ce cône le long de la génératrice (D). A chaque point A de la droite correspond ainsi un plan (P). Considérons aussi la courbe (C) du complexe située dans le plan (P), elle est tangente à la droite (D) précisément au point A, de sorte qu'à chaque plan (P) passant par la droite correspond un point de cette droite. *Il y a une correspondance homographique entre les points et les plans d'une droite du complexe.*



Précisons la nature de cette homographie. Une droite quelconque est représentée par deux équations de la forme :

$$(1) \qquad X = aZ + f, \qquad Y = bZ + g.$$

Pour qu'elle appartienne à un complexe, il faut et il suffit qu'il existe une relation entre les paramètres a, b, f, g ; soit :

$$(2) \qquad \varphi(a, b, f, g) = 0.$$

Cherchons alors toutes les droites du complexe infiniment voisines

de la droite (1) et rencontrant cette droite. Une telle droite est représentée par les équations :

$$(3)\qquad X = (a + da)Z + (f + df), \qquad Y = (b + db)Z + (g + dg).$$

Exprimons qu'elle rencontre la droite (1). Les équations :

$$(4)\qquad Zda + df = 0, \qquad Zdb + dg = 0,$$

doivent avoir une solution commune en Z, ce qui donne la condition :

$$(5)\qquad da.dg - db.df = 0.$$

Le point d'intersection M des deux droites infiniment voisines aura alors pour cote :

$$(6)\qquad Z = -\frac{df}{da} = -\frac{dg}{db}.$$

Si nous supposons connu le point M, les relations (4), dans lesquelles Z est connu, déterminent les rapports des différentielles. Et le plan qui passe par les deux droites infiniment voisines (1) et (3) s'obtient en multipliant les équations (3) respectivement par db et $-da$, et ajoutant. Car cela donne, en tenant compte de (5), l'équation d'un plan qui passe par la droite (1) :

$$(7)\qquad (X - aZ - f)db - (Y - bZ - g)da = 0.$$

L'équation de ce plan ne dépend que du rapport $\frac{da}{db}$. Nous en concluons que *toutes les droites du complexe infiniment voisines de la droite* (D) *et rencontrant cette droite en un point* M *donné sont dans un même plan ; et inversement toutes les droites du complexe infiniment voisines de la droite* (D), *et situées dans un même plan passant par* (D), *rencontrent cette droite au même point*. Posons, pour abréger,

$$(8)\qquad \lambda = \frac{da}{db};$$

l'équation (7) s'écrit :

$$(9)\qquad X - aZ - f - \lambda(Y - bZ - g) = 0.$$

Montrons qu'il y a une relation homographique entre λ et Z. Il suffit, pour cela, de tirer df, dg des équations (4) et de porter dans l'identité :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}da + \frac{\partial\varphi}{\partial b}db + \frac{\partial\varphi}{\partial f}df + \frac{\partial\varphi}{\partial g}dg = 0,$$

qui résulte de la différentiation de l'équation du complexe (2). Il vient :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right) da + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial g}\right) db = 0\,;$$

et la relation d'homographie est, d'après (8),

$$(10) \qquad \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial b} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial g} = 0.$$

Considérons, en particulier, le cône du complexe de sommet M ; la génératrice infiniment voisine est une droite du complexe, rencontrant (D) en M : le plan de ces deux droites est le plan tangent au cône du complexe, et nous retrouvons l'homographie précédemment définie.

Soit encore une courbe du complexe quelconque, tangente à la droite (D) au point A. Considérons une tangente infiniment voisine de cette courbe ; à la limite cette tangente rencontre (D) au point A, et le plan de ces deux droites n'est autre que le plan osculateur à la courbe au point A ; donc ce plan osculateur est associé au point A dans l'homographie précédente. Ainsi *toutes les courbes du complexe, tangentes à une droite* (D) *en un même point* A, *ont même plan osculateur en ce point : c'est le plan tangent au cône du complexe associé au point* A.

Considérons enfin une congruence de droites appartenant au complexe. Prenons dans cette congruence une droite (D), et sur cette droite un point focal A ; le point A appartient à une des nappes de la surface focale de la congruence. Il appartient aussi à l'arête de rebroussement d'une des développables de la congruence ; et cette arête de rebroussement, enveloppe de droites (D) appartenant au complexe, est une courbe du complexe. Son plan osculateur en A est le deuxième plan focal de la congruence ; d'après ce qui précède, *toutes les congruences du complexe, passant par la droite* (D) *et ayant un foyer en* A, *ont même second plan focal relatif à la droite* (D) ; il y a correspondance homographique entre ce second plan focal et le point A.

Surfaces du complexe

2. — Cherchons si dans un complexe il y a des congruences ayant une surface focale double. Sur une telle surface (Φ), les arêtes de rebroussement des développables sont des lignes asymptotiques [Ch. VI, § 1 p. 127, § 2 p. 133] ; or ce sont des courbes du complexe.

Il s'agit donc de trouver des surfaces telles qu'une famille de lignes asymptotiques soit formée de courbes du complexe. Considérons une telle asymptotique (C) et un de ses points A. Le plan osculateur à la courbe (C) en A est le plan tangent au cône (K) du complexe associé au point A, et ce plan osculateur est tangent à la surface (Φ). Les surfaces cherchées sont donc tangentes en chacun de leurs points au cône du complexe associé à ce point. *Réciproquement*, soit (Φ) une telle surface ; considérons en chacun de ses points la génératrice de contact (D) du cône du complexe avec le plan tangent. Il existe sur la surface (Φ) une famille de courbes (C), tangentes en chacun de leurs points à celle de ces droites (D) qui est ainsi associée à ce point [Cf. Ch. VI, p. 126]. Ces courbes (C) sont des courbes du complexe ; leur plan osculateur est le plan tangent au cône du complexe le long de la droite (D) ; c'est donc le plan tangent à la surface (Φ), et les courbes (C) sont des asymptotiques de cette surface.

De telles surfaces, tangentes en chaque point au cône du complexe ayant ce point pour sommet, sont appelées *surfaces du complexe*.

Considérons les équations d'une droite du complexe :

$$x = az + f, \qquad y = bz + g \; ; \tag{1}$$

a, b, f, g y sont liés par l'équation :

$$\varphi(a, b, f, g) = 0. \tag{2}$$

Transportons l'origine au point (x, y, z) et appelons X, Y, Z les nouvelles coordonnées. Alors X, Y, Z sont les coefficients de direction d'une droite qui passe au point x, y, z ; et les coefficients angulaires de cette droite étant :

$$a = \frac{X}{Z}, \qquad b = \frac{Y}{Z},$$

l'équation du cône du complexe associé au point (x, y, z) est :

$$\varphi\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, x - \frac{X}{Z}z, y - \frac{Y}{Z}z\right) = 0 \; ;$$

ou, en rendant homogène,

$$\Psi(X, Y, Z, xZ - zX, yZ - zY) = 0. \tag{3}$$

Il en résulte que *les courbes du complexe sont définies par l'équation différentielle, homogène en* dx, dy, dz,

$$\Psi(dx, dy, dz, xdz - zdx, ydz - zdy) = 0. \tag{4}$$

On peut la considérer comme l'équation même du complexe puis-

qu'on en déduit, en remplaçant dx, dy, dz par X, Y, Z, l'équation générale (3) des cônes du complexe ; et qu'on remonte ensuite à l'équation (2) du complexe, en faisant

$$X = a,\ Y = b,\ Z = 1,\ x - az = f,\ y - bz = g.$$

Introduisons maintenant l'équation tangentielle du cône du complexe :

$$\chi(x, y, z, U, V, W) = 0 ; \tag{5}$$

qui exprime, par définition, que le plan

$$UX + VY + WZ = 0$$

est tangent au cône (3).

La condition pour qu'une surface $z = G(x, y)$ soit tangente à ce cône en chacun de ses points, est que l'équation (5) soit vérifiée par $U = \frac{\partial G}{\partial x} = p$, $V = \frac{\partial G}{\partial y} = q$, $W = -1$; *les surfaces du complexe sont donc définies par l'équation aux dérivées partielles* :

$$\chi(x, y, z, p, q, -1) = 0, \tag{6}$$

qui est de la forme :

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{7}$$

Nous obtenons une équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui représente le complexe, au point de vue tangentiel ; puisqu'on en déduit immédiatement l'équation tangentielle (5) du cône du complexe sous la forme :

$$F\left(x, y, z, -\frac{U}{W}, -\frac{V}{W}\right) = 0. \tag{8}$$

Inversement, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre (7) exprime que le plan tangent à une surface intégrale est tangent au cône (8), associé au point de contact. Mais les génératrices de tous ces ∞^3 cônes remplissent en général tout l'espace, et ne forment un complexe qu'exceptionnellement.

De même une *équation de Monge* quelconque, c'est-à-dire de la forme, homogène en dx, dy, dz,

$$G(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{9}$$

ne définit qu'exceptionnellement les courbes d'un complexe, car elle n'est pas, en général, réductible à la forme (4).

Sur certaines équations aux dérivées partielles

3. — Pour pouvoir mieux préciser ces cas d'exception, rappelons quelques notions essentielles de la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire de la forme :

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Un *élément de contact intégral* est un élément de contact dont les coordonnées (x, y, z, p, q) satisfont à l'équation donnée (1).

Le *cône élémentaire* associé au point (x, y, z) est l'enveloppe des éléments de contact intégraux appartenant à ce point ; son équation tangentielle est, avec les notations précédentes, l'équation :

$$F\left(x, y, z, -\frac{U}{W}, -\frac{V}{W}\right) = 0. \tag{2}$$

Tout élément linéaire formé d'un point et d'une génératrice du cône élémentaire associé à ce point s'appelle un *élément linéaire intégral.* Si dx, dy, dz sont les coefficients de direction d'une telle génératrice, l'équation qui caractérise les éléments linéaires intégraux s'obtient en cherchant l'équation ponctuelle du cône qui a pour équation tangentielle l'équation (2) ; et en y remplaçant les coordonnés X, Y, Z par dx, dy, dz. Cela revient à éliminer p et q entre les équations :

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} dy - \frac{\partial F}{\partial q} dx = 0, \tag{3}$$

qui définissent l'élément linéaire suivant lequel le cône élémentaire de sommet (x, y, z) touche l'élément de contact intégral (x, y, z, p, q).

L'équation obtenue est une *équation de Monge* :

$$G(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{4}$$

qui est dite associée à l'équation aux dérivées partielles (1).

Les *courbes intégrales* sont les courbes dont tous les éléments linéaires (points — tangentes) sont des éléments linéaires intégraux. Elles sont définies par l'équation (4).

Inversement, toute équation de Monge (4) définit les courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles, qu'on obtient en passant de l'équation ponctuelle :

$$G(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \tag{5}$$

à l'équation tangentielle (2) correspondante, c'est-à-dire en éliminant dx, dy, dz entre l'équation (4) et les équations :

$$\frac{\partial G}{\partial dx} + p\frac{\partial G}{\partial dz} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial dy} + q\frac{\partial G}{\partial dz} = 0, \tag{6}$$

qui définissent les coefficients p, q du plan tangent au cône (5) le long de la génératrice :

$$\frac{X}{dx} = \frac{Y}{dy} = \frac{Z}{dz}.$$

Si on fait intervenir le principe de dualité, on est conduit à considérer, sur chaque élément de contact intégral, en plus de l'élément linéaire intégral, une autre direction. Soit, en effet, A et (P) le point et le plan qui constituent l'élément de contact intégral (x, y, z, p, q) ; au cône élémentaire (K), de sommet A, enveloppe des plans qui forment avec A des éléments de contact intégraux, correspond par dualité, la courbe (Γ), lieu des points M qui, associés au plan (P), donnent des éléments de contact intégraux ; à la génératrice de contact du cône élémentaire (K) et du plan (P), intersection de ce plan et du plan tangent à (K) infiniment voisin, correspond la tangente à (Γ) en A, qui joint A au point infiniment voisin de (Γ). C'est la direction de cette tangente qui doit donc intervenir ; nous appellerons l'élément linéaire qu'elle définit avec A : *l'élément linéaire caractéristique* de l'élément de contact considéré.

Cherchons cet élément caractéristique. Soit $(\delta x, \delta y, \delta z)$ un déplacement infinitésimal du point A ; s'il définit l'élément considéré, l'élément de contact $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, p, q)$ est un élément de contact intégral, ce qui s'exprime par les conditions :

$$F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, p, q) = 0, \qquad \delta z - p\delta x - q\delta y = 0.$$

Dans la première, on doit négliger les infiniment petits d'ordre supérieur ; et comme, par hypothèse, l'équation (1) est vérifiée, il reste les équations :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0, \qquad \delta z = p\delta x + q\delta y,$$

qui donnent la direction cherchée. On peut les écrire :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta y = 0, \qquad \delta z = p\delta x + q\delta y. \tag{7}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer analytiquement que l'équation aux dérivées partielles (1) définit les surfaces d'un

complexe. Il résulte, en effet, du § 1, que, dans ce cas, la courbe (Γ), qui est alors la courbe du complexe située dans le plan (P), a pour tangente en A la génératrice de contact du cône (K) avec ce plan. Donc l'élément linéaire intégral et l'élément linéaire caractéristique de l'élément de contact [A, (P)] sont alors confondus. D'après les formules (3) et (7), on a donc :

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0, \tag{8}$$

pour tout système de nombres (x, y, z, p, q) vérifiant l'équation (1). En d'autres termes, l'équation (8) est une conséquence de l'équation (1).

Cette condition est suffisante, car elle entraîne la coïncidence, pour tout élément de contact intégral, de l'élément linéaire intégral et de l'élément linéaire caractéristique ; et nous allons montrer que cette coïncidence exige que les cônes élémentaires (K) soient les cônes d'un complexe de droites.

Reprenons, en effet, l'équation ponctuelle (5) des cônes (K). Un élément de contact intégral quelconque est formé d'un point A (x, y, z), et du plan (P), tangent au cône (5), le long d'une quelconque de ses génératrices : celle-ci est définie par ses coefficients de direction X, Y, Z ; et les six quantités x, y, z ; X, Y, Z vérifient l'équation (5).

Un élément de contact intégral, infiniment voisin, est défini, de même, par les six quantités $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$; $X + \delta X$, $Y + \delta Y$, $Z + \delta Z$; et les six différentielles δx, δy, δz ; δX, δY, δZ sont liées par $\delta G = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\delta z + \frac{\partial G}{\partial X}\delta X + \frac{\partial G}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial G}{\partial Z}\delta Z = 0. \tag{9}$$

Si la direction δx, δy, δz est celle de l'élément linéaire caractéristique du premier élément de contact, elle est parallèle au plan (P), ce qui donne :

$$\frac{\partial G}{\partial X}\delta x + \frac{\partial G}{\partial Y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial Z}\delta z = 0 ; \tag{10}$$

et, de plus, la direction $X + \delta X$, $Y + \delta Y$, $Z + \delta Z$ de la nouvelle génératrice de contact est encore dans le plan (P), de sorte que δX, δY, δZ est aussi une direction de ce plan. On a donc également :

$$\frac{\partial G}{\partial X}\delta X + \frac{\partial G}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial G}{\partial Z}\delta Z = 0.$$

En comparant à l'équation (9), on en conclut :

$$\frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\delta z = 0. \tag{11}$$

Les équations (10) et (11) définissent donc l'élément linéaire caractéristique. Si on exprime, dès lors, que sa direction est précisément X, Y, Z, on déduit de (10) l'équation :

$$X\frac{\partial G}{\partial X} + Y\frac{\partial G}{\partial Y} + Z\frac{\partial G}{\partial Z} = 0,$$

qui n'est autre que (5), en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes ; et on tire de (11) la condition cherchée :

$$X\frac{\partial G}{\partial x} + Y\frac{\partial G}{\partial y} + Z\frac{\partial G}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Nous avons donc à exprimer que l'équation (12) est une conséquence de l'équation (5). Nous prendrons celle-ci, à cet effet, sous la forme résolue :

$$x - \Gamma\left(y, z, \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0,$$

et nous y ferons le changement de variable :

$$y = \omega + \frac{Y}{Z}z,$$

de sorte que ξ sera une fonction de $\omega \equiv y - \frac{Y}{Z}z$, de z, de $\frac{X}{Z}$ et de $\frac{Y}{Z}$. L'équation (5) s'écrira ainsi :

$$0 = G \equiv x - \xi\left(\omega, z, \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \text{ avec } \omega \equiv y - \frac{Y}{Z}z\,; \tag{13}$$

et la condition (12) deviendra :

$$X - Y\frac{\partial \xi}{\partial \omega} - Z\left(-\frac{Y}{Z}\frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{X}{Z}.$$

Cette équation doit être une conséquence de (13) ; mais, comme elle ne contient pas x, cela exige qu'elle soit une identité. On en conclut donc, en intégrant,

$$\xi = \frac{X}{Z}z + \psi\left(\omega, \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

L'équation (13) des cônes (K) est donc :

$$x - \frac{X}{Z} z = \psi \left(y - \frac{Y}{Z} z, \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right);$$

et, d'après les calculs du § 2, c'est l'équation générale des cônes du complexe :

$$f = \psi(g, a, b).$$

Nous pouvons donc conclure que *les équations aux dérivées partielles dont les surfaces intégrales sont les surfaces d'un complexe sont caractérisées par la coïncidence de l'élément linéaire intégral et de l'élément linéaire caractéristique de chacun de leurs éléments de contact intégraux. Ce sont les équations*

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

qui entraînent comme conséquence algébrique, l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0.$$

Les caractéristiques et les surfaces du complexe

4. — L'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

et des équations de Monge

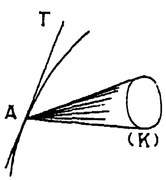
$$(2) \qquad G(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

résulte des considérations suivantes :

On appelle *bande intégrale* un lieu d'éléments de contact, appartenant à une même courbe (points — plans tangents), et qui sont tous des éléments de contact intégraux. C'est donc un ensemble de ∞^1 éléments de contact, satisfaisant aux équations :

$$(3) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad dz - pdx - qdy = 0.$$

Si on prend une courbe quelconque, et si, par chacune de ses tangentes on mène un plan tangent au cône élémentaire associé au point de contact, on obtient une bande intégrale. Par une courbe quelconque passent donc, si l'équation (3) est algébrique en p, q, un nombre limité de bandes intégrales. Ce nombre se réduit d'une unité dans le cas où la courbe est une courbe intégrale.



Imaginons une surface intégrale (S). Toute courbe

tracée sur cette surface fournit une bande intégrale, formée des éléments de contact communs à la courbe et à la surface. Parmi elles, nous allons chercher celles qui ont pour support des courbes intégrales. En chaque point A de la surface (S), le cône élémentaire (K) touche le plan tangent (P) à la surface suivant l'élément linéaire intégral de l'élément de contact intégral [A, (P)] : il s'agit donc de trouver les courbes de (S), qui, en chacun de leurs points A, ont pour élément linéaire l'élément linéaire intégral ainsi défini. D'après les équations (3) du paragraphe précédent, cela revient à intégrer l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}, \tag{4}$$

où on doit supposer z, p, q remplacés, en fonction de x et y, au moyen de l'équation

$$z = \Phi(x, y) \tag{5}$$

de la surface (S). Cette équation (4) est ainsi une équation différentielle ordinaire ; et, par chaque point de (S) passe une courbe intégrale, et, en général, une seule, située sur (S) : la surface (S) est donc engendrée par ces courbes (C).

Considérons, maintenant, la bande intégrale circonscrite à la surface le long d'une de ces courbes (C). Les éléments satisfont déjà aux équations (3) du paragraphe précédent, que nous écrirons, en introduisant une variable auxiliaire θ,

$$\text{(6)}\quad F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad dx = \frac{\partial F}{\partial p}\,d\theta, \qquad dy = \frac{\partial F}{\partial q}\,d\theta,$$
$$dz = \left(p\,\frac{\partial F}{\partial p} + q\,\frac{\partial F}{\partial q}\right) d\theta.$$

Ils satisfont de plus aux équations :

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy, \tag{7}$$

où r, s, t sont les dérivées secondes de la fonction (5). Or, cette fonction satisfaisant identiquement à l'équation (1), on en déduit, par différentiation,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z} + r\,\frac{\partial F}{\partial p} + s\,\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z} + s\,\frac{\partial F}{\partial p} + t\,\frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Et, en tenant compte des équations (6) et (7), ces équations donnent :

$$\text{(8)}\quad dp = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}\right) d\theta, \qquad dq = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}\right) d\theta.$$

Il résulte de là que *les éléments de contact de toute surface intégrale se répartissent en* ∞^1 *bandes qui font partie des* ∞^3 *bandes définies par les équations* (6) *et* (8). *Ces* ∞^3 *bandes s'appellent les bandes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles* (1). *Les courbes qui leur servent de support en sont les courbes caractéristiques, ou, simplement, les caractéristiques.*

Les bandes caractéristiques dépendent bien de trois constantes arbitraires. En effet, les équations différentielles :

$$(9)\quad dx = \frac{\partial F}{\partial p}\,d\theta, \qquad dy = \frac{\partial F}{\partial q}\,d\theta, \qquad dz = \left(p\,\frac{\partial F}{\partial p} + q\,\frac{\partial F}{\partial q}\right)d\theta,$$
$$dp = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)d\theta, \qquad dq = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)d\theta,$$

se réduisent à quatre, si on élimine $d\theta$. Elles entraînent, de plus, la combinaison :

$$(10)\qquad 0 = dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial p}\,dp + \frac{\partial F}{\partial q}\,dq\,;$$

et réciproquement, si cette combinaison $dF = 0$ est vérifiée, ces équations (9) se réduisent à trois. Si donc on tient compte de l'équation :

$$(1)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

en en tirant, par exemple, q, et en portant dans les équations (9), il reste un système de trois équations différentielles du premier ordre en x, y, z, p, dont l'intégrale générale dépend bien de trois constantes arbitraires.

Supposons, au contraire, que nous intégrions le système (9), tel quel. Nous obtiendrons des fonctions de θ.

$$(11)\quad x = \xi(\theta\,; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \qquad y = \eta(\theta\,; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$
$$z = \zeta(\theta\,; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$

$$(12)\quad p = \varpi(\theta\,; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \qquad q = \chi(\theta\,; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$

qui, pour $\theta = 0$, par exemple, se réduiront respectivement aux valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. Elles auront pour conséquence l'équation (10), c'est-à-dire :

$$(13)\qquad F(x, y, z, p, q) = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)\,;$$

de sorte qu'elles définiront une bande caractéristique, pourvu que l'élément de contact initial $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ qui y figure soit un élément de contact intégral.

Donc, *par tout élément de contact intégral passe une bande carac-*

téristique et une seule. Et, par suite, *une surface intégrale qui contient un élément de contact intégral contient toute la bande caractéristique qui a cet élément pour élément initial.*

Nous sommes ainsi en mesure d'effectuer la construction de toutes les surfaces intégrales ; car, *si on se donne, sur une surface intégrale quelconque, une bande intégrale quelconque, qui ne soit pas une bande caractéristique, cette surface est engendrée par les bandes caractéristiques qui ont, pour éléments initiaux, les divers éléments de cette bande.* Cela résulte de ce qui précède.

Réciproquement : *les bandes caractéristiques qui ont, pour éléments initiaux, les éléments d'une bande intégrale quelconque, engendrent une surface intégrale.*

Supposons, en effet, que nous remplacions, dans les équations (11) et (12), les constantes x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 par les fonctions

$$(14) \qquad x = x_0(u), \quad y = y_0(u), \quad z = z_0(u), \quad p = p_0(u), \quad q = q_0(u),$$

qui définissent, au moyen du paramètre u, la bande intégrale donnée. A cause de l'identité (13), tous les éléments de contact obtenus sont intégraux; et les équations (11) définissent, en fonction des paramètres θ et u, une surface. Pour prouver que c'est bien la surface annoncée, il suffit de vérifier qu'elle a, pour éléments de contact, les éléments (11) et (12) ; c'est-à-dire que, si on désigne par d et δ les différentiations relatives à θ et u, respectivement, les fonctions (11), (12) de θ et u satisfont aux deux identités :

$$(15) \qquad D \equiv dz - p dx - q dy = 0, \qquad \Delta \equiv \delta z - p\delta x - q\delta y = 0.$$

En ce qui concerne la première, elle résulte des équations (9). La seconde est une conséquence de l'identité :

$$d\Delta - \delta D = - dp.\delta x - dq\delta y + dx.\delta p + dy\delta q.$$

En tenant compte des équations (9), le second membre devient, en effet,

$$\delta F - \frac{\partial F}{\partial z}(\delta z - p\delta x - q\delta y)d\theta \equiv \delta F - \Delta\frac{\partial F}{\partial z}\,d\theta.$$

Les éléments (11), (12) étant tous intégraux, δF est nul. Il reste donc, puisque la première condition (15) est réalisée,

$$(16) \qquad \frac{d\Delta}{d\theta} = -\frac{\partial F}{\partial z}\Delta.$$

Il faut supposer que, dans le facteur $\frac{\partial F}{\partial z}$, les variables sont rempla-

cées par les fonctions (11) et (12). On a ainsi une équation en Δ, de la forme :

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = M(\theta, u).\,\Delta. \tag{17}$$

Or Δ s'annule pour $\theta = 0$, puisque les éléments initiaux (14) forment une bande d'éléments ; et une telle équation (17) n'admet pas de solution, autre que la solution $\Delta \equiv 0$, qui s'annule pour $\theta = 0$. Donc la seconde condition (15) est bien vérifiée, quels que soient θ et u.

En résumé, *par une bande intégrale passe, en général, une surface intégrale et une seule.*

Les bandes intégrales qui font exception sont les bandes caractéristiques. Par une bande caractéristique passent une infinité de surfaces intégrales, qui se raccordent tout le long de la caractéristique servant de support à la bande.

Si nous revenons maintenant au cas particulier où l'équation (1) est celle qui définit les surfaces d'un complexe, nous voyons, en comparant l'analyse précédente avec celle du § 2, que, les courbes intégrales étant les courbes du complexe, les caractéristiques situées sur une surface intégrale constituent la famille de ∞^1 courbes du complexe qui sont les lignes asymptotiques de cette surface. La condition pour qu'il en soit ainsi est que les équations (6) et (8) aient pour conséquence :

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (1) ait elle-même pour conséquence :

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0.$$

C'est l'équation (8) du § 3. Nous pouvons donc, d'après les résultats de ce § 3, conclure que *les équations aux dérivées partielles du premier ordre pour lesquelles les caractéristiques sont des lignes asymptotiques des surfaces intégrales, sont (si on excepte les équations linéaires), les équations dont les cônes élémentaires sont les cônes des complexes de droites.*

Remarque 1. — Si *l'équation* (1) *est linéaire* en p, q, le cône élémentaire se réduit à une droite ; les courbes caractéristiques sont définies, indépendamment des bandes caractéristiques, par les équations, en x, y, z,

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} - F}.$$

Il n'y a plus que ∞^2 courbes caractéristiques, quoi qu'il y ait toujours ∞^3 bandes caractéristiques, dont chacune est définie par une caractéristique et une caractéristique infiniment voisine.

Les surfaces intégrales sont celles qui sont engendrées par ∞^1 caractéristiques. Les caractéristiques sont asymptotiques pour toutes les surfaces intégrales dans le cas où elles sont des droites, et dans ce cas seulement.

Remarque 2. — Si le cône du complexe se réduit à un plan, le complexe est appelé un *complexe linéaire*. Le cône n'a alors pas d'équation tangentielle, et la théorie précédente ne s'applique plus.

Le cas des complexes linéaires sera étudié dans le chapitre suivant.

Propriétés géométriques des caractéristiques

5\. — Nous écarterons, dans ce qui suit, les équations linéaires. Considérons un élément de contact (x, y, z, p, q) d'une bande caractéristique; et l'élément infiniment voisin; l'intersection des plans de ces deux éléments est définie par les deux équations :

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0, \qquad (X - x)dp + (Y - y)dq = 0.$$

La seconde résulte, en effet, de la différentiation de la première, en tenant compte de :

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Si on compare aux équations (7) du § 3, en tenant compte des équations (8), § 4, des bandes caractéristiques, on voit que *l'intersection du plan d'un élément de contact d'une bande caractéristique avec celui de l'élément infiniment voisin en est l'élément linéaire caractéristique*. De là le nom que nous avions donné à cet élément linéaire [Cf. Ch. VII, § 4, p. 175].

Cette propriété suffit à définir les bandes caractéristiques, parmi celles qui ont une courbe intégrale comme support, sauf dans le cas où l'équation aux dérivées partielles est celle des surfaces d'un complexe de droites. Car des équations :

$$dx = \frac{\partial F}{\partial p}\, d\theta, \qquad dy = \frac{\partial F}{\partial q}\, d\theta, \qquad dz = \left(p\,\frac{\partial F}{\partial p} + q\,\frac{\partial F}{\partial q}\right) d\theta,$$

$$dp = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}\right) d\tau, \qquad dq = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}\right) d\tau,$$

on conclut, en portant dans $dF = 0$,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right](d\theta - d\tau) = 0\,;$$

c'est-à-dire $d\theta = d\tau$, si on exclut le cas réservé. Les équations précédentes sont, dès lors, celles qui définissent les bandes caractéristiques de l'équation :

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

On voit que, dans tous les cas, l'élément linéaire intégral et l'élément linéaire caractéristique d'un élément de contact (intégral) d'une surface intégrale ont, sur cette surface, des directions conjuguées. Ces directions sont confondues dans le cas des surfaces d'un complexe, ce qui correspond bien au fait que les caractéristiques sont, alors, des asymptotiques des surfaces intégrales.

Quant aux *courbes caractéristiques* d'une surface intégrale, leur propriété fondamentale est que, en excluant les solutions singulières, *pour que ∞^1 caractéristiques engendrent une surface intégrale, il faut et il suffit que chacune d'elles rencontre la caractéristique infiniment voisine.*

Les résultats obtenus, au paragraphe précédent, sur la génération des surfaces intégrales par les caractéristiques (11) peuvent, en effet, s'énoncer ainsi : pour qu'une famille de ∞^1 courbes (11) engendre une surface intégrale, il faut et il suffit que l'on prenne pour x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 des fonctions d'un paramètre u, telles que l'on ait à la fois :

$$\text{(2)} \qquad F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \delta z_0 - p_0\delta x_0 - q_0\,\delta y_0 = 0.$$

La première doit être supposée réalisée, si les équations (11) représentent les ∞^3 caractéristiques de l'équation (1). Nous allons voir que la seconde exprime que deux caractéristiques infiniment voisines se rencontrent.

Cherchons, en effet, à exprimer qu'il en est ainsi. Continuons à désigner par d et δ les différentiations relatives à θ et à u. Nous devrons exprimer qu'il y a compatibilité entre les équations (11) et les équations qu'on en déduit en les différentiant, dans l'hypothèse où x, y, z sont constants ; ce sont :

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\xi}{d\theta}\delta\theta + \delta\xi = 0, \qquad \frac{d\eta}{d\theta}\delta\theta + \delta\eta = 0, \qquad \frac{d\zeta}{d\theta}\delta\theta + \delta\zeta = 0.$$

Comme elles ne contiennent pas x, y, z, il suffit d'éliminer, entre ces équations, θ et $\delta\theta$. Or, en remarquant que l'on a, identiquement,

$$\frac{d\zeta}{d\theta} - \varpi\frac{d\xi}{d\theta} - \chi\frac{d\eta}{d\theta} = 0,$$

on conclut, des équations (4), la combinaison :

$$\delta\zeta - \varpi\delta\xi - \chi\delta\eta = 0. \tag{5}$$

Pour $\theta = 0$, celle-ci se réduit à (3), qui en est donc une conséquence. Et on a vu, au paragraphe précédent, que, si (3) a lieu, (5) est vérifiée, quel que soit θ. Donc, en excluant des solutions singulières possibles, dues à la présence du facteur $\frac{\partial F}{\partial z}$ dans la formule fondamentale (16), nous concluons que la combinaison (5) des équations (4) est équivalente à l'équation (3), qui ne contient ni θ, ni $\delta\theta$. Celle-ci résulte donc de l'élimination de θ et de $\delta\theta$ entre les équations (4). Elle exprime donc bien la condition d'intersection de deux caractéristiques infiniment voisines.

Nous voyons de plus que *cette équation de condition* (3) *est linéaire* et homogène *par rapport aux différentielles des constantes arbitraires* qui figurent dans les équations générales des caractéristiques. On peut supposer, sans altérer ce caractère, que les équations des caractéristiques soient mises sous la forme :

$$P(x, y, z\,;\,\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad Q(x, y, z\,;\,\alpha, \beta, \gamma) = 0\,; \tag{6}$$

car x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 s'exprimeront en α, β, γ au moyen des équations :

$$\begin{aligned} &P(x_0, y_0, z_0\,;\,\alpha, \beta, \gamma) = 0, \\ &Q(x_0, y_0, z_0\,;\,\alpha, \beta, \gamma) = 0, \\ &F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_0} & \frac{\partial P}{\partial y_0} & \frac{\partial P}{\partial z_0} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_0} & \frac{\partial Q}{\partial y_0} & \frac{\partial Q}{\partial z_0} \\ p_0 & q_0 & -1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

δx_0, δy_0, δz_0 seront des formes linéaires homogènes en $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, dont les coefficients seront fonctions de α, β, γ ; et la condition (3) deviendra une *équation de Pfaff* en α, β, γ :

$$A(\alpha, \beta, \gamma)\delta\alpha + B(\alpha, \beta, \gamma)\delta\beta + C(\alpha, \beta, \gamma)\delta\gamma = 0. \tag{7}$$

Intégrales complètes

On retrouve ce résultat, et sa réciproque, par la considération des intégrales complètes. On appelle *intégrale complète* de l'équation (1) toute famille de ∞^2 surfaces intégrales :

$$H(x, y, z\,;\, \alpha, \beta) = 0, \tag{8}$$

sous la réserve que tout élément de contact intégral appartienne à l'une des surfaces de la famille. Le mode de génération des surfaces intégrales, obtenu précédemment, prouve l'existence d'une infinité d'intégrales complètes, pour toute équation (1) non linéaire.

Soit (S) une surface intégrale quelconque, non comprise dans l'intégrale complète (8) ; et une bande intégrale de cette surface. Chaque élément de contact (E) de cette bande appartient à une des surfaces (8) et à une seule. On définit ainsi ∞^1 surfaces (8), dont chacune a en commun avec (S) une bande caractéristique, celle qui est définie par l'élément initial (E) ; car cette bande caractéristique est toute entière sur (S), et sur la surface (8) considérée. Donc *toute surface intégrale est l'enveloppe de ∞^1 surfaces, faisant partie de l'intégrale complète.*

Réciproquement, toute enveloppe de ∞^1 surfaces (8) a pour éléments de contact des éléments de ces surfaces, c'est-à-dire des éléments de contact intégraux. C'est donc une surface intégrale.

De plus, puisqu'on obtient ainsi toutes les surfaces intégrales, *les caractéristiques sont les courbes d'intersection des diverses surfaces de l'intégrale complète, avec une surface infiniment voisine quelconque.*

Une surface intégrale quelconque est donc définie par deux équations de la forme :

$$H(x, y, z\,;\, \alpha, \beta) = 0, \qquad 0 = \delta H \equiv \frac{\partial H}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta}\delta\beta, \tag{9}$$

où α et β sont liés par une relation arbitraire, $\beta = \varphi(\alpha)$.

Et les caractéristiques situées sur cette surface sont définies par les mêmes équations, pour les diverses valeurs de α.

L'ensemble des caractéristiques est représenté par les équations :

$$H(x, y, z\,;\, \alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \gamma\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \tag{10}$$

avec les trois constantes arbitraires α, β, γ.

La condition d'intersection d'une caractéristique (10) et d'une carac-

téristique infiniment voisine s'obtient en éliminant x, y, z entre les équations (10) et les équations :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta}\delta\beta = 0, \qquad \delta\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \gamma\frac{\partial H}{\partial \beta}\right) = 0;$$

ce qui donne :

(11) $$\delta\beta - \gamma\delta\alpha = 0.$$

C'est bien une équation de Pfaff ; et elle exprime que :

$$\beta = \varphi(\alpha), \qquad \gamma = \varphi'(\alpha).$$

On retrouve donc la condition que doivent remplir α, β, γ pour que les caractéristiques (10) soient celles qui engendrent une surface intégrale.

Les résultats précédents sont donc bien, ainsi, démontrés de nouveau.

Etudions, de plus, la réciproque. Remarquons d'abord que *toute équation de Pfaff*.

(12) $$A\delta\alpha + B\delta\beta + C\delta\gamma = 0,$$

peut, par un changement de variables, se ramener à la forme intégrable $\delta\alpha = 0$, *ou à la forme* (11), $\delta\beta - \gamma\delta\alpha = 0$.

Posons, en effet, dans (12),

(13) $$\beta = \psi(\alpha, \gamma; \alpha_0),$$

α_0 étant une constante arbitraire; et ψ étant arbitrairement choisi. Nous obtiendrons une équation différentielle en α et γ, dont l'intégrale générale sera de la forme :

(14) $$\beta_0 = \chi(\alpha, \gamma; \alpha_0),$$

β_0 désignant une nouvelle constante arbitraire. Nous déterminons ainsi, par les équations (13), (14), ∞^2 courbes intégrales de l'équation de Pfaff.

Cela posé, faisons, dans (12), le changement de variables, défini par les formules (13) et (14), en y considérant α_0, β_0 comme des variables nouvelles, et en tirant α et β. On peut toujours supposer, la fonction ψ étant arbitraire, que cette résolution est possible. Il viendra une équation de Pfaff en α_0, β_0, γ, qui, devant être vérifiée pour des valeurs constantes quelconques de α_0 et β_0, c'est-à-dire, pour $\delta\alpha_0 = \delta\beta_0 = 0$, se réduira à la forme :

$$A_0\delta\alpha_0 + B_0\delta\beta_0 = 0,$$

ou :

$$\delta\beta_0 - \gamma_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma)\delta\alpha_0 = 0.$$

Si alors γ_0 ne dépend pas de γ, il reste une équation du premier ordre en α_0 et β_0 seuls, qui s'écrit $\delta\alpha_1 = 0$, si son intégrale générale est :

$$\alpha_1 = M(\alpha_0, \beta_0) \equiv N(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (\alpha_1 = \text{const.}). \tag{15}$$

Si, au contraire, la fonction γ_0 dépend de γ, on la prendra comme nouvelle variable, à la place de γ, et l'équation de Pfaff sera ramenée à la forme :

$$\delta\beta_0 - \gamma_0\delta\alpha_0 = 0. \tag{16}$$

Dans ce cas, la solution générale de (12) est :

$$\beta_0 = \varphi(\alpha_0), \qquad \gamma_0 = \varphi'(\alpha_0) ;$$

il n'y a donc pas de surface satisfaisant à l'équation.

Au contraire, dans le cas précédent, l'équation (12) équivaut à :

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const.},$$

qui définit une famille de surfaces, satisfaisant à l'équation, ainsi que toute courbe tracée sur une de ces surfaces. On dit que, dans ce cas, l'équation de Pfaff est *intégrable*.

Cela posé, supposons un complexe de courbes (6), tel que la condition d'intersection de deux courbes infiniment voisines soit de la forme de Pfaff (7) ; et supposons cette équation non intégrable. On pourra supposer qu'on a fait un changement préliminaire de paramètres, tel que cette relation soit réduite à la forme canonique (11) :

$$\delta\beta - \gamma\delta\alpha = 0. \tag{11}$$

Nous pouvons, de plus, supposer les équations du complexe de courbes résolues sous la forme :

$$z = K(x, y\,;\ \alpha, \beta), \qquad \gamma = L(x, y\,;\ \alpha, \beta) ; \tag{17}$$

sans quoi, en tirant γ de l'une des équations (6) et portant dans l'autre, il resterait une relation indépendante des coordonnées x, y, z.

Exprimons que la courbe (17) rencontre la courbe infiniment voisine ; il faut éliminer x et y entre :

$$\gamma = L(x, y\,;\ \alpha, \beta), \qquad \frac{\partial K}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial K}{\partial \beta}\delta\beta = 0, \qquad \delta\gamma = \frac{\partial L}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial L}{\partial \beta}\delta\beta.$$

Pour que cela reproduise l'équation (11), il faut et il suffit que l'on ait, identiquement :

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} + L\frac{\partial K}{\partial \beta} = 0 :$$

de sorte que les équations (17) s'écrivent :

$$(18)\qquad z = \mathrm{K}(x, y\ ;\ \alpha,\ \beta),\qquad \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \beta} = 0.$$

Pour prouver qu'elles représentent une famille de caractéristiques, il suffit, dès lors, de prouver qu'il existe une équation aux dérivées partielles, et une seule, ayant pour intégrale complète :

$$(19)\qquad z = \mathrm{K}(x,\ y\ ;\ \alpha,\ \beta)\ ;$$

puisque les équations (10) deviennent les équations (18), si on y remplace H par $(z - \mathrm{K})$.

Or les fonctions (19) de x et y satisfont aux équations :

$$(20)\qquad p = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x},\qquad q = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y}\ ;$$

et entre (19) et (20) on peut éliminer α et β, ce qui donne bien une équation de la forme (1) :

$$(1)\qquad \mathrm{F}(x,\ y,\ z, p,\ q) = 0.$$

Il faut, toutefois, vérifier que cette élimination ne peut donner qu'une équation, c'est-à-dire que K, $\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y}$, considérés comme fonctions de α, β, ne sont liés que par une seule relation. S'il en était autrement, les déterminants fonctionnels :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x \partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x \partial \beta}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \alpha},\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y \partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y \partial \beta}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \alpha}$$

seraient identiquement nuls tous deux. On aurait donc des identités simultanées :

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \alpha} + \mathrm{L}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \beta} = 0,\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x \partial \alpha} + \mathrm{L}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x \partial \beta} = 0,\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y \partial \alpha} + \mathrm{L}\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial y \partial \beta} = 0.$$

En différentiant la première en x et y, et comparant aux deux autres, on conclut $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} \equiv \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} \equiv 0$. Mais, alors, la seconde équation (18), qui est $\mathrm{L} = \gamma$, ne contiendrait pas x et y, ce qui est impossible.

Nous concluons donc que *pour qu'un complexe de courbes soit formé des ∞^3 caractéristiques d'une même équation aux dérivées partielles du premier ordre, il faut et il suffit que la condition d'intersection de deux courbes du complexe, infiniment voisines, s'exprime par une équation de Pfaff, non intégrable, entre les trois paramètres dont dépendent ces ∞^3 courbes.*

Détermination des courbes intégrales

6. — Il nous reste à montrer comment l'intégration de l'équation de Monge :

(2) $$G(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

associée, comme on l'a vu au § 3, à l'équation aux dérivées partielles :

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

c'est-à-dire la détermination des courbes intégrales de cette équation, résulte des considérations précédentes.

Or toute courbe intégrale est l'enveloppe des caractéristiques définies par les éléments de contact initiaux qu'on obtient en associant à chaque point M de la courbe intégrale le plan tangent mené au cône élémentaire (K), de sommet M, par la génératrice de ce cône qui est tangente en M à la courbe. Et ces caractéristiques, ayant une enveloppe, engendrent une surface intégrale, puisque chacune d'elles rencontre la caractéristique infiniment voisine.

Réciproquement, toute famille de caractéristiques engendrant une surface intégrale, a, puisque chacune d'elles rencontre la caractéristique infiniment voisine, une enveloppe ; et cette courbe enveloppe est une courbe intégrale, puisque tout élément linéaire d'une caractéristique est un élément linéaire intégral.

On obtient donc toutes les courbes intégrales en cherchant la surface intégrale la plus générale, et, sur celle-ci, l'enveloppe des caractéristiques qui l'engendrent.

Le résultat se présente sous une forme explicite, si on se donne une intégrale complète :

(3) $$H(x, y, z;\ \alpha, \beta) = 0.$$

Une surface intégrale quelconque est définie par les caractéristiques :

(4) $$H = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \varphi'(\alpha)\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \qquad (\beta = \varphi(\alpha));$$

et l'enveloppe de ces caractéristiques est définie par les trois équations :

(5) $$H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \varphi'(\alpha)\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} + 2\varphi'(\alpha)\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} + \varphi'^2(\alpha)\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} + \varphi''(\alpha)\frac{H\partial}{\partial \beta} = 0,$$

où β doit être remplacé par la fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$.

Remarque. — Sur une surface intégrale, il y a donc une seule courbe intégrale qui n'est pas une caractéristique ; et c'est l'enveloppe des caractéristiques Les surfaces intégrales d'une même équation aux dérivées partielles ont donc une analogie remarquable avec les surfaces développables : les caractéristiques jouent le rôle des génératrices ; et la courbe intégrale non caractéristique joue le rôle d'arête de rebroussement. Cette analogie devient une identité dans le cas particulier qui fait l'objet du paragraphe suivant.

Complexes spéciaux

7. — Nous dirons qu'un complexe est *spécial* quand l'homographie qui existe entre les points et les plans d'une droite du complexe est spéciale. A un élément d'un système correspond toujours le même élément dans le système associé, sauf pour un seul élément du premier système, dont le correspondant est indéterminé. L'équation de l'homographie relative au complexe :

$$\varphi(a, b, f, g) = 0 \tag{1}$$

étant [§ 1, équ. (10)] :

$$\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial b} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial g} = 0,$$

la condition pour que cette homographie soit spéciale est :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial g} - \frac{\partial\varphi}{\partial b}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial f} = 0. \tag{2}$$

Le complexe (1) sera donc spécial si cette équation (2) est une conséquence de l'équation (1).

Le *complexe des droites tangentes à une surface* donne un exemple de complexe spécial. Considérons, en effet, une congruence de ce complexe ; les développables de la congruence sont circonscrites à la surface, l'un des plans focaux est donc indépendant de la congruence que l'on considère. Même résultat si on considère le *complexe des droites rencontrant une courbe donnée.* On obtient donc ainsi des complexes spéciaux. Nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Prenons, en effet, l'équation d'un complexe sous la forme :

$$\varphi = g - \Psi(a, b, f) = 0;$$

la condition (2) s'écrira :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a} + \frac{\partial\Psi}{\partial b} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial f} = 0. \tag{3}$$

Cette relation ne contient plus g ; elle doit donc être une identité par rapport à a, b, f.

Considérons alors une droite (D) du complexe, et les droites infiniment voisines qui la rencontrent ; nous avons obtenu la condition d'intersection [§ 1, équ. (5)] ; qui s'écrit ici :

$$da.d\Psi - db.df = 0,$$

ou :

$$db.df - da\left(\frac{\partial\Psi}{\partial a}\,da + \frac{\partial\Psi}{\partial b}\,db + \frac{\partial\Psi}{\partial f}\,df\right) = 0.$$

Remplaçons $\frac{\partial\Psi}{\partial a}$ par sa valeur tirée de (3), il vient :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial f}\,da^2 - \frac{\partial\Psi}{\partial b}\,da.db - \frac{\partial\Psi}{\partial f}\,da.df + db.df = 0,$$

ou :

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial b}\,da - df\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial f}\,da - db\right) = 0. \tag{4}$$

Supposons, par exemple, que ce soit le premier facteur qui s'annule. Le point de rencontre de la droite (D) avec les droites infiniment voisines correspondantes est donné [§ 1, équ. (6)], par :

$$z = -\frac{df}{da} = -\frac{\partial\Psi}{\partial b}, \tag{5}$$

de sorte que toutes les droites considérées coupent (D) au même point F :

$$x = az + f, \qquad y = bz + \Psi, \qquad z = -\frac{\partial\Psi}{\partial b}. \tag{6}$$

Différentions ces formules :

$$dx = adz + zda + df, \qquad dy = bdz + zdb + d\Psi,$$

d'où, en remplaçant z par sa valeur :

$$dx - adz = -\frac{\partial\Psi}{\partial b}\,da + df, \qquad dy - bdz = \frac{\partial\Psi}{\partial a}\,da + \frac{\partial\Psi}{\partial f}\,df.$$

On en conclut, en éliminant df et tenant compte de la relation (3) :

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial f}(dx - adz) + dy - bdz = 0. \tag{7}$$

Les différentielles dx, dy, dz sont donc liées par une relation linéaire et homogène ; les fonctions x, y, z sont, par suite, liées au moins par une relation.

S'il n'y a qu'une relation, le lieu des points F est une surface, et l'équation (7), qui définit les déplacements infiniment petits tangents, montre que la droite (D) est tangente à cette surface. S'il y a deux relations, le lieu des points F est une courbe et toute droite (D) rencontre cette courbe, puisque chaque point F est sur une des droites (D). Les deux seuls cas possibles, pour les complexes spéciaux, sont donc bien les cas indiqués.

Remarque 1. — Dans l'équation (4) nous avons, jusqu'à présent, considéré le seul facteur $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial b}\, da - df\right)$. Annulant l'autre facteur :

$$\frac{db}{da} = \frac{\partial \Psi}{\partial f},$$

nous aurions alors des droites du complexe qui, d'après l'équation (7) du § 1, seraient toutes situées dans un même plan avec (D). Ce plan

$$(X - aZ - f)\frac{\partial \Psi}{\partial f} - (Y - bZ - \psi) = 0$$

serait le plan singulier de l'homographie ; et, d'après l'équation (7), il est tangent au lieu des points F. On voit ainsi qu'en prenant l'un ou l'autre des facteurs, on définit le même lieu par points et par plans tangents.

Remarque 2. — Si l'équation du complexe ne contient ni f ni g, c'est une relation entre les coefficients de direction de la droite (D); on a le complexe des droites rencontrant une même courbe à l'infini.

Remarque 3. — Le calcul précédent peut s'interpréter dans le cas d'un complexe quelconque. L'équation (2), qui n'est plus alors conséquence de l'équation du complexe, jointe à cette équation du complexe, définit la congruence des droites du complexe sur lesquelles l'homographie est spéciale. Ce sont les *droites singulières* du complexe. Alors *toutes les surfaces réglées du complexe passant par une droite singulière ont même plan tangent au point F de cette droite défini précédemment*, ce plan tangent étant parallèle au plan :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial f}(x - az) + y - bz = 0.$$

Si le lieu des points singuliers est une surface, l'équation (7) montre que cette surface est aussi l'enveloppe des plans singuliers, et les droites singulières lui sont tangentes. *La surface des singularités est*

une des nappes de la surface focale de la congruence des droites singulières; les points et les plans singuliers sont des éléments focaux de cette congruence, non associés entre eux. Si le lieu des points singuliers est une courbe, les plans singuliers sont, d'après (7), *tangents à cette courbe, qui est une courbe focale de la congruence des droites singulières.*

Remarque 4. — Considérons en particulier le cas des *complexes du second degré.* En un point quelconque, le plan associé est tangent au cône du complexe; il est unique et bien déterminé. Il ne peut y avoir indétermination que si le cône du complexe associé à ce point se décompose. *La surface des singularités est donc le lieu des points où le cône du complexe se décompose; c'est aussi l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe du complexe se décompose*, comme on le verrait par un raisonnement analogue, en se plaçant au point de vue corrélatif.

Surfaces et courbes des complexes spéciaux

Revenons aux complexes spéciaux : considérons d'abord le cas du complexe des tangentes à une surface (Φ). Les cônes du complexe sont les cônes circonscrits à cette surface. Les plans tangents à (Φ) constituent une intégrale complète. Une surface intégrale quelconque est donc l'enveloppe de ∞^1 plans tangents à (Φ), c'est-à-dire une développable quelconque circonscrite à (Φ). Les caractéristiques, qui sont en général les courbes de contact de la surface intégrale avec les surfaces faisant partie de l'intégrale complète, qu'elle enveloppe, sont les génératrices rectilignes de ces développables, c'est-à-dire les droites du complexe. Enfin on obtiendra les courbes intégrales en prenant l'enveloppe des caractéristiques sur les surfaces intégrales; ce sont donc les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à (Φ) qui sont les courbes du complexe.

Considérons maintenant le complexe des droites rencontrant une courbe; on voit de même que les surfaces du complexe sont les développables passant par la courbe, les caractéristiques sont les droites du complexe et les courbes du complexe sont les arêtes de rebroussement.

Ainsi, *dans les complexes spéciaux, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont dépend la recherche des surfaces du complexe a pour caractéristiques les droites du complexe. Réciproquement, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les caractéristiques sont des droites est associée à un complexe spécial.*

Soit en effet l'équation aux dérivées partielles :

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dont les caractéristiques sont des droites. On obtient les surfaces intégrales en prenant une courbe intégrale et en menant les caractéristiques tangentes : donc les surfaces intégrales sont des développables, et le plan tangent est le même le long de chaque caractéristique, c'est-à-dire que $dp = 0$, $dq = 0$ doivent être conséquences des équations des caractéristiques. Cela revient à dire que $F = 0$ doit entraîner comme conséquence les équations :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Supposons alors que z figure dans l'équation aux dérivées partielles et posons :

$$F \equiv z - \theta(x, y, p, q);$$

les conditions précédentes s'écriront

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} - p = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} - q = 0,$$

d'où il résulte que θ est de la forme

$$\theta = px + qy + \Psi(p, q),$$

et l'équation aux dérivées partielles est

$$z - px - qy = \Psi(p, q).$$

Le plan tangent à une quelconque des surfaces intégrales est donc

$$pX + qY - Z + \Psi(p, q) = 0.$$

L'ensemble de tous ces plans a donc une enveloppe, surface ou courbe. Le cône élémentaire associé à un point quelconque est le cône circonscrit à cette surface ou à cette courbe, et l'équation aux dérivées partielles est bien associée à un complexe spécial.

Remarque. — Nous avons supposé que z figurait dans l'équation aux dérivées partielles ; s'il n'en est pas ainsi, cette équation, comme on le prévoit en changeant le rôle des coordonnées, ne doit contenir ni x, ni y. Car si on pouvait l'écrire, par exemple,

$$F \equiv x - \theta(y, p, q) = 0,$$

la condition

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

ne serait pas vérifiée. Donc l'équation aux dérivées partielles prend alors la forme

$$\Phi(p, q) = 0,$$

qui donne le complexe des droites rencontrant une courbe à l'infini.

Considérons, par exemple, l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

elle définit le *complexe des droites isotropes ;* les courbes du complexe sont les courbes minima, et on les obtient sans intégration comme arêtes de rebroussement des développables isotropes. C'est bien ainsi que nous avons déterminé les courbes minima au ch. III, § 4.

Surfaces normales aux droites du complexe

8. — Proposons-nous maintenant de chercher les *surfaces dont les normales appartiennent au complexe* défini par l'équation

$$\varphi(a, b, f, g) = 0. \tag{1}$$

Une normale à une surface du complexe est définie par les équations

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = -(Z - z)$$

ou

$$X = -pZ + x + pz, \qquad Y = -qZ + y + qz;$$

de sorte que les surfaces cherchées sont définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\varphi(-p, -q, x + pz, y + qz) = 0. \tag{2}$$

Si une surface répond à la question, toutes les surfaces parallèles répondent aussi à la question.

Si le complexe est spécial, le problème revient à la recherche d'une congruence de normales, connaissant une des multiplicités focales. Si la multiplicité focale est une courbe (φ), les surfaces cherchées sont les enveloppes de sphères ayant leurs centres sur (φ), d'après ce que nous avons vu au Chap. VII, § 2, p. 165. Ces sphères constituent, du reste, une intégrale complète évidente de l'équation du problème.

Si la multiplicité focale est une surface (Φ), le problème revient à la détermination des lignes géodésiques de cette surface [Ch. VII, § 2, p. 164].

Dans le cas d'un complexe quelconque, nous allons chercher les congruences de normales appartenant au complexe : on obtiendra ensuite les surfaces au moyen d'une quadrature. Pour que ∞^2 droites

$$\frac{x-f}{a}=\frac{y-g}{b}=\frac{z-0}{1}$$

soient les normales d'une même surface, il faut et il suffit, en posant

$$\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

que $\alpha df+\beta dg$ soit une différentielle totale exacte [Ch. VII, § 1, p. 162]. Or l'équation du complexe, résolue par rapport à β, s'écrit

$$(3) \qquad \beta=\Psi(\alpha, f, g);$$

et $\alpha df+\Psi(\alpha, f, g)\, dg$ doit être une différentielle totale par rapport à deux variables indépendantes. Déterminons α par exemple en fonction de f, g, ce qui donne la condition

$$(4) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial g}=\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial f}+\frac{\partial\Psi}{\partial f}.$$

Cherchons une solution de la forme

$$\theta(\alpha, f, g)=\mathrm{c^{te}}.$$

En différentiant par rapport à f, g, on obtient

$$\frac{\partial\theta}{\partial f}+\frac{\partial\alpha}{\partial f}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial g}+\frac{\partial\alpha}{\partial g}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0;$$

et la condition (4) devient

$$\frac{\partial\theta}{\partial g}-\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial f}+\frac{\partial\Psi}{\partial f}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0.$$

C'est une équation linéaire aux dérivées partielles, dont l'intégration se ramène au système d'équations différentielles ordinaires

$$dg=\frac{df}{-\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}}=\frac{d\alpha}{\frac{\partial\Psi}{\partial f}},$$

qui détermine les caractéristiques.

Ayant ainsi calculé α en fonction de f et g, on en déduit β par

l'équation (3), et on a $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$. On effectuera la quadrature de différentielle totale

$$u = -\int \alpha df + \Psi dg,$$

et les surfaces cherchées seront définies [Ch. VII, § 1, p. 162] par les formules :

$$x = f + \alpha u, \quad y = g + \beta u, \quad z = \gamma u.$$

Remarque. — *Les développées des surfaces cherchées sont les surfaces pour lesquelles* ∞^1 *géodésiques sont des courbes du complexe*. Ce sont les surfaces focales des congruences considérées.

CHAPITRE X

COMPLEXES LINÉAIRES

Généralités sur les complexes algébriques

1. — Soit une droite

$$(1)\qquad x = az + f, \qquad y = bz + g;$$

un *complexe algébrique* sera défini par une relation algébrique entre a, b, f, g :

$$\varphi(a, b, f, g) = 0.$$

Si on considère les droites du complexe passant par un point A, et situées dans un plan (P) passant par ce point, ce sont les génératrices d'intersection du plan (P) avec le cône du complexe associé au point A, ou bien les tangentes issues de A à la courbe du complexe située dans le plan (P) [ch. IX, § 1]; si le complexe est algébrique, le cône et la courbe sont algébriques, et on voit que *l'ordre du cône du complexe est égal à la classe de la courbe plane du complexe;* leur valeur commune s'appelle le *degré du complexe*, c'est le nombre de droites du complexe situées dans un plan et passant par un point de ce plan.

Si ce nombre est égal à 1, le complexe est appelé *complexe linéaire;* le cône du complexe associé au point A est un plan qu'on appelle *plan focal* ou *plan polaire* du point A. La courbe du complexe située dans un plan (P) se réduit à un point, qu'on appelle *foyer* ou *pôle* du plan (P); si le plan (P) est le plan polaire du point A, le point A est le pôle du plan (P). *Il y a réciprocité entre un pôle et son plan polaire*, au point de vue du principe de dualité; les transformations dualistiques n'altèrent pas le degré d'un complexe algébrique quelconque.

Coordonnées homogènes

2. — Pour l'étude des complexes algébriques, il y a avantage à remplacer a, b, f, g par les coordonnées homogènes de droites.

Coordonnées de Plücker. — Considérons les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes

$$\frac{X-f}{a}=\frac{Y-g}{b}=\frac{Z-h}{c}, \tag{2}$$

équations qui contiennent comme cas particulier les équations (1). Nous prendrons pour *coordonnées pluckériennes* de la droite les six quantités

$$a,\quad b,\quad c,\quad p=gc-hb,\quad q=ha-fc,\quad r=fb-ga. \tag{3}$$

Ces coordonnées sont, comme on le voit immédiatement, liées par la relation homogène

$$pa+qb+rc=0. \tag{4}$$

Ces six paramètres, qui ne sont définis qu'à un même facteur près, et qui sont liés par une relation homogène, se réduisent à quatre en réalité ; a, b, c sont les projections sur les axes d'un certain vecteur porté par la droite ; p, q, r sont les moments de ce vecteur par rapport aux axes (en coordonnées rectangulaires). On peut aussi les définir comme les coefficients des équations des trois projections de la droite sur les trois plans coordonnés, supposées mises sous la forme :

$$cY-bZ-p=0,\quad aZ-cX-q=0,\quad bX-aY-r=0, \tag{5}$$

Voyons ce que devient l'équation du complexe. De (2) on tire

$$X=\frac{a}{c}Z-\frac{q}{c},\qquad Y=\frac{b}{c}Z+\frac{p}{c},$$

et l'équation

$$\varphi(a, b, f, g)=0$$

devient

$$\varphi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, -\frac{q}{c}, \frac{p}{c}\right)=0.$$

Cette équation rendue homogène prend la forme

$$\Psi(a, b, c, p, q)=0$$

on peut y introduire r en vertu de l'équation (4), et on obtient finale-

ment, pour définir le complexe, en coordonnées pluckériennes, une équation homogène de degré égal au degré du complexe,

$$\chi(a, b, c, p, q, r) = 0. \tag{6}$$

Réciproquement, toute équation de la forme précédente peut, à cause de l'homogénéité, en faisant, dans les formules (3), $c = 1$, $h = 0$, être ramenée à la forme primitive de l'équation d'un complexe :

$$\chi(a, b, 1, g, -f, fb - ga) = 0. \tag{7}$$

Cherchons le *cône du complexe* de sommet (x, y, z). Désignons par X, Y, Z les coordonnées courantes : il résulte de la définition des coordonnées pluckériennes que

$$\left\{\begin{array}{lll} a = X - x, & b = Y - y, & c = Z - z, \\ p = cY - bZ, & q = aZ - cX, & r = bX - aY. \end{array}\right.$$

L'équation du cône du complexe s'obtiendra en remplaçant a, b, c, p, q, r par les valeurs précédentes dans l'équation du complexe. C'est donc :

$$\chi(X - x,\ \ Y - y,\ \ Z - z,\ \ yZ - zY,\ \ zX - xZ,\ \ xY - yX) = 0.$$

Si on transporte l'origine des coordonnées, par translation, au sommet du cône, cette équation est, simplement,

$$\chi(X, Y, Z,\ \ yZ - zY,\ \ zX - xZ,\ \ xY - yX) = 0.$$

Si on cherche une *courbe du complexe*, on prendra

$$\left\{\begin{array}{lll} a = dx, & b = dy, & c = dz, \\ p = ydz - zdy, & q = zdx - xdz, & r = xdy - ydx, \end{array}\right.$$

d'où l'équation différentielle des courbes du complexe

$$\chi(dx, dy, dz, ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx) = 0.$$

La condition pour qu'un complexe soit spécial est [Ch. IX, § 7]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial g} - \frac{\partial\varphi}{\partial b}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial f} = 0;$$

elle devient ici

$$\frac{\partial\chi}{\partial a}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p} + \frac{\partial\chi}{\partial b}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q} + \frac{\partial\chi}{\partial c}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r} = 0. \tag{8}$$

En effet, en prenant l'équation du complexe sous la forme (7), et tenant compte des formules correspondantes :

$$c = 1,\ \ p = g,\ \ q = -f,\ \ r = fb - ga,$$

elle s'écrit :

$$\frac{\partial\chi}{\partial a}\frac{\partial\chi}{\partial p}+\frac{\partial\chi}{\partial b}\frac{\partial\chi}{\partial q}-\frac{\partial\chi}{\partial r}\left(a\frac{\partial\chi}{\partial a}+b\frac{\partial\chi}{\partial b}+p\frac{\partial\chi}{\partial p}+q\frac{\partial\chi}{\partial q}+r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)=0.$$

Et il suffit de tenir compte de l'équation

$$a\frac{\partial\chi}{\partial a}+b\frac{\partial\chi}{\partial b}+c\frac{\partial\chi}{\partial c}+p\frac{\partial\chi}{\partial p}+q\frac{\partial\chi}{\partial q}+r\frac{\partial\chi}{\partial r}=0,$$

déduite de (6) au moyen de l'identité d'Euler sur les fonctions homogènes, pour obtenir l'équation (8), où, à cause de son homogénéité, on pourra redonner à c une valeur arbitraire, les autres coordonnées reprenant les valeurs qui correspondent à cette valeur de c.

Dans le cas d'un complexe algébrique quelconque, l'équation (8), jointe à celle du complexe, définit *la congruence des droites singulières.*

Reprenons l'homographie entre droites et plans d'une droite du complexe; les coefficients de cette homographie sont $\frac{\partial\varphi}{\partial a}, \frac{\partial\varphi}{\partial b}, \frac{\partial\varphi}{\partial f}, \frac{\partial\varphi}{\partial g}$, et par suite, en coordonnées homogènes, ce sont des combinaisons linéaires et homogènes des dérivées $\frac{\partial\chi}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial\chi}{\partial r}$. Considérons la droite du complexe $(a_0, b_0, c_0, p_0, q_0, r_0)$.

L'équation

$$\Sigma a\frac{\partial\chi}{\partial a_0}+\Sigma p\frac{\partial\chi}{\partial p_0}=0$$

définit un complexe linéaire contenant la droite considérée; et, sur cette droite, l'homographie pour ce complexe linéaire est précisément la même que pour le complexe primitif. Ce complexe linéaire est dit *tangent* au complexe donné.

Remarque. — Si nous définissons la droite par deux points (x, y, z) et (x', y', z') nous voyons que

$$\left\{\begin{array}{lll} a=x'-x, & b=y'-y, & c=z'-z, \\ p=yz'-zy', & q=zx'-xz', & r=xy'-yx'; \end{array}\right.$$

d'où comme ci-dessus, l'équation du cône du complexe

$$(9) \qquad \chi(x'-x,\ y'-y,\ z'-z,\ yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx')=0;$$

Corrélativement, définissons la droite par deux plans (u, v, w, s) (u', v', w', s'). On trouve, en déduisant des équations de ces plans,

$$u\mathrm{X}+v\mathrm{Y}+w\mathrm{Z}+s=0 \qquad u'\mathrm{X}+v'\mathrm{Y}+w'\mathrm{Z}+s'=0,$$

celles des projections de la droite, et en ramenant ces dernières à la forme (5);

$$\begin{cases} a = vw' - wv', & b = wu' - uw', & c = uv' - vu', \\ p = su' - us', & q = sv' - vs', & r = sw' - ws'. \end{cases}$$

On obtient alors l'équation tangentielle d'une courbe plane du complexe

$$(10) \quad \chi(vw' - wv', \quad wu' - uw', \quad uv' - vu', \quad su' - us', \quad sv' - vs', \quad sw' - ws') = 0,$$

et on voit bien ainsi que la classe de cette courbe, comme l'ordre du cône du complexe. est égale au degré de l'équation du complexe.

Coordonnées générales de Grassmann et Klein. — Plus généralement prenons un tétraèdre de référence quelconque, et soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point; u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'un plan. Considérons la droite comme définie par deux points (x), (y). Nous prendrons comme coordonnées de cette droite les quantités

$$(11) \qquad p_{ik} = \rho \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur d'homogénéité arbitraire.

Remarquons que $p_{ii} = 0$ et $p_{ki} = -p_{ik}$, de sorte que l'on n'obtient ainsi que six coordonnées distinctes, par exemple p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}. Ce sont les moments relatifs, par rapport au vecteur des deux points (x) (y), des vecteurs égaux à 1 pris sur les six arêtes du tétraèdre; ou, du moins, des quantités proportionnelles à ces moments.

Soient deux droites (p_{ik}) et (p'_{ik}) : le moment relatif M des deux vecteurs correspondants est donné par la formule

$$\mu M = p_{12}\, p'_{34} + p_{34}\, p'_{12} + p_{13}\, p'_{42} + p_{42}\, p'_{13} + p_{14}\, p'_{23} + p_{23}\, p'_{14},$$

où μ est un facteur constant.

Si ce moment est nul, les deux droites se rencontrent. Or considérons le déterminant, identiquement nul,

$$\Theta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

Développons d'après la règle de Laplace :

$$\Theta = 2\,(p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23}).$$

En introduisant la fonction

$$(12) \qquad \Phi\,(p_{ik}) = p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23},$$

les coordonnées d'une droite quelconque satisfont à la condition

$$(13) \qquad \Phi(p_{ik}) = 0,$$

et la condition de rencontre de deux droites peut s'écrire :

$$(14) \qquad \Sigma p'_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}} = 0,$$

la sommation s'étendant aux six coordonnées.

Si nous définissons la droite par deux plans (u), (v), nous prendrons pour coordonnées :

$$(15) \qquad q_{ik} = \sigma \begin{vmatrix} u_i & u_k \\ v_i & v_k \end{vmatrix},$$

σ étant un facteur d'homogénéité arbitraire. Cherchons les relations entre les coordonnées p_{ik} et les coordonnées q_{ik}. La droite étant l'intersection des plans (u), (v), un point (x) de cette droite sera l'intersection des trois plans (u), (v), (w). Donc :

$$\begin{aligned} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 &= 0, \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 &= 0, \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Considérons le déterminant :

$$\Omega = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix};$$

on peut prendre, pour la coordonnée x_i, le coefficient $S_i = \frac{\partial \Omega}{\partial s_i}$ de s_i. Pour avoir un autre point (y) de la droite, nous le définirons par les trois plans (u), (v), (s), et alors $y_i = W_i = \frac{\partial \Omega}{\partial w_i}$. Considérons l'adjoint de Ω :

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}.$$

Nous avons, entre chaque mineur du deuxième ordre de Ω, formé avec les deux dernières lignes, et le mineur complémentaire de l'adjoint, la relation classique, qui s'écrit, avec la notation définie par la formule (12),

$$\frac{1}{\rho} p_{ik} = \Omega \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \Phi(q_{ik})}{\partial q_{ik}}.$$

On peut écrire plus simplement, en disposant des facteurs de proportionalité.

$$(16) \qquad p_{ik} = \frac{\partial \Phi(q_{ik})}{\partial q_{ik}},$$

et de même :

$$(17) \qquad q_{ik} = \frac{\partial \Phi(p_{ik})}{\partial p_{ik}}.$$

L'équation du complexe sera alors F $(p_{ik}) = 0$, ou F $(q_{hl}) = 0$, les indices i, k; h, l se correspondant de telle manière que $p_{hl} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}}$: d'où les équations du cône ou de la courbe du complexe. La condition pour que le complexe soit spécial est :

$$(18) \qquad \frac{\partial F}{\partial p_{12}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{24}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{32}} = 0.$$

Remarque. — On peut définir les coordonnées p_{ik} par la remarque que la droite considérée se trouve dans les plans :

$$p_{ik}\, x_l + p_{kl}\, x_i + p_{li}\, x_k = 0\,;$$

et on peut déduire de là les relations entre les p_{ik} et les q_{hl}. La condition $\Phi\ (p_{ik}) = 0$ exprime la condition nécessaire est suffisante pour que ces quatre plans passent par une même droite, si on suppose $p_{ik} = -p_{ki}$. Elle est donc nécessaire et suffisante pour que les p_{ik} soient les coordonnées d'une droite.

Complexes linéaires

3. — Etudions plus spécialement les complexes linéaires. L'équation d'un tel complexe est, avec les notations adoptées,

$$(1) \qquad \Sigma A_{hl} p_{ik} = 0.$$

Le complexe est spécial s'il satisfait à la relation :

$$(2) \qquad A_{12}\, A_{34} + A_{13}\, A_{42} + A_{14}\, A_{23} = 0,$$

et cette équation exprime que les A_{ik} sont les coordonnées d'une droite ; l'équation du complexe exprime que toute droite du complexe rencontre cette droite. *Un complexe linéaire spécial est donc constitué par les droites rencontrant une droite fixe*, qu'on appelle *directrice du complexe.*

Soit (D) une droite d'un complexe linéaire quelconque, M un point de cette droite, et (P) son plan polaire. Le cône du complexe se réduisant ici au plan (P), l'homographie du complexe est celle des plans (P) de la droite (D) associés à leurs pôles M.

Faisceau de complexes

4. — Soient deux complexes linéaires :

$$\Sigma A_{hl} p_{ik} = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma B_{hl} p_{ik} = 0\,; \tag{2}$$

l'équation

$$\Sigma(A_{hl} + \lambda B_{hl})\, p_{ik} = 0$$

représentera un *faisceau de complexes*. Cherchons dans ce faisceau les complexes spéciaux. Ils sont définis par l'équation :

$$\begin{aligned}(A_{12} + \lambda B_{12})(A_{34} + \lambda B_{34}) + (A_{13} + \lambda B_{13})(A_{42} + B_{42}) + \\ + (A_{14} + \lambda B_{14})(A_{23} + \lambda B_{23}) = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

équation du deuxième degré. *Dans un faisceau de complexes linéaires il y a donc deux complexes spéciaux.* Cherchons à quelles conditions ces deux complexes spéciaux sont confondus.

Supposons, à cet effet, que $\lambda = 0$ soit racine de l'équation (3). La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est :

$$\Sigma A_{12} A_{34} = 0,$$

et l'équation précédente se réduit à :

$$\lambda(A_{12}B_{34} + A_{34}B_{12} + \ldots +)\, \lambda^2(B_{12}B_{34} + \ldots) = 0. \tag{4}$$

Nous appellerons *invariant du complexe* (1) l'expression :

$$\Delta_A = A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23}, \tag{5}$$

et *invariant simultané* des deux complexes (1) et (2) l'expression :

$$\Delta_{AB} = \Sigma B_{ik} \frac{\partial \Delta_A}{\partial A_{ik}}\,; \tag{6}$$

l'équation (4) s'écrit, avec ces notations :

$$\lambda \Delta_{AB} + \lambda^2 \Delta_B = 0. \tag{7}$$

Pour que $\lambda = 0$ soit racine double, il faut en outre que $\Delta_{AB} = 0$. Or $\Delta = 0$ exprime que les A_{ik} sont les coordonnées d'une droite, $\Delta_{AB} = 0$

exprime que cette droite appartient au deuxième complexe qui définit le faisceau. Elle appartient évidemment au premier, donc elle appartient à tous les complexes du faisceau. On conclut donc : *pour que l'un des complexes spéciaux soit double, il faut et il suffit que sa directrice appartienne à tous les complexes du faisceau.*

Pour que l'équation se réduise à une identité, c'est-à-dire pour que tous les complexes du faisceau soient spéciaux, il faut encore que $\Delta_B = 0$; il faut donc que les deux complexes soient spéciaux, et que leurs directrices se rencontrent.

Nous appellerons *congruence linéaire* l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires. Par un point quelconque de l'espace passe en général une droite de cette congruence, et une seule : c'est l'intersection des plans polaires du point dans les deux complexes. On voit de même que dans un plan quelconque il y a en général une droite de la congruence et une seule, qui joint les foyers de ce plan dans les deux complexes. Considérons le faisceau déterminé par les deux complexes qui définissent la congruence. Si ce faisceau contient deux complexes spéciaux distincts, toutes les droites de la congruence appartiennent à ces complexes spéciaux, et par suite rencontrent deux directrices fixes ; et réciproquement, *une congruence linéaire est formée en général des droites rencontrant deux directrices fixes.*

Si les complexes spéciaux sont confondus, soit (A) leur directrice commune ; considérons un complexe quelconque (C) du faisceau. (A) est une droite du complexe (C) ; à chaque point M de (A) correspond, homographiquement, son plan polaire (P) par rapport au complexe (C) ; les droites de la congruence passant par M et appartenant au complexe (C) sont dans ce plan polaire (P). Or les points de (A) ont même plan polaire par rapport à tous les complexes du faisceau. Les droites de la congruence rencontrent la droite (A), et pour chaque point de cette droite sont situées dans le plan polaire correspondant.

Réciproquement, si on se donne arbitrairement une homographie, faisant correspondre à chaque point M d'une droite fixe (A) un plan (P) passant par cette droite, l'ensemble des ∞^2 droites dont chacune passe par un point M et est située dans le plan (P) associé à ce point M est une congruence linéaire ; et les complexes spéciaux du faisceau correspondant sont confondus.

Prenons, en effet, (A) pour axe des z. Un point M de (A) sera défini par sa cote z ; et un plan (P), passant par (A), par son équation $y - mx = 0$. L'équation de l'homographie donnée s'écrira donc :

$$P + Bz + Qm - Amz = 0. \tag{8}$$

Les coordonnées pluckériennes a, b, c, p, q, r d'un rayon de la congruence considérée satisfont d'abord à

$$(9) \qquad r = 0,$$

qui exprime que le rayon rencontre oz. Si a et b ne sont pas nuls tous deux, supposons, par exemple, $a \neq o$. Le rayon rencontre Oz au point de cote $z = \frac{q}{a}$, et se trouve dans le plan $bx - ay = 0$. La relation (8) donne donc, en tenant compte de $ap + bq + cr = 0$ et de (9),

$$(10) \qquad Ap + Bq + Pa + Qb = 0.$$

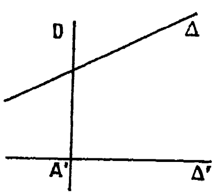
Si $a = b = 0$, et si p, q ne sont pas nuls tous deux, le rayon rencontre Oz à l'infini, et ses équations sont $cy = p$, $cx = -q$. La relation (8) donne donc $Ap + Bq = 0$, et l'équation (10) est encore vérifiée. Elle l'est encore pour $a = b = p = q = r = 0$, qui correspond au rayon singulier (A).

En résumé, la congruence est définie par les équations (9), (10). Or elles définissent deux complexes linéaires : l'invariant du premier est nul, ainsi que leur invariant simultané. On retombe donc bien dans le cas indiqué.

Complexes en involution

5. — Reprenons le faisceau de complexes précédent. Les deux complexes de base sont dits *en involution* si $\Delta_{AB} = 0$. Considérons, dans le cas général, une droite (D) commune aux deux complexes. A un point M de cette droite correspond homographiquement son plan polaire dans chacun des complexes, soient (P), (Q) ces plans ; il en résulte une correspondance homographique (H) entre les plans (P), (Q) de la droite. De même, en partant d'un plan de la droite, on verrait qu'il existe une homographie (H′) entre les points de la droite.

Cherchons les plans doubles de l'homographie (H). Considérons à cet effet une des directrices (Δ) de la congruence linéaire définie par les deux complexes, et le plan (D) (Δ) ; le pôle de ce plan par rapport à chacun des deux complexes est l'intersection A′ de (D) avec la deuxième directrice (Δ'), car toutes les droites passant par A′ et rencontrant (Δ) appartiennent à la congruence, et par suite aux deux complexes. Ainsi, dans chacun des deux complexes, A′ est foyer du plan (D) (Δ) ; et de même A, intersection de (D) et de (Δ), est foyer du plan



(D) (Δ'). Il en résulte que ces plans se correspondent à eux-mêmes dans l'homographie (H), et, par conséquent, que ces deux plans sont les plans doubles cherchés.

On verrait de même que les points A et A' sont les points doubles de l'homographie (H'). Cela posé, nous allons montrer que la condition $\Delta_{AB} = 0$ exprime que chacune des deux homographies (H) et (H') est une involution.

En effet, pour que l'homographie (H) entre les plans (P), (Q) soit une involution, il faut et il suffit que les plans (P), (Q) soient conjugués par rapport à ses plans doubles. L'équation du plan polaire d'un point par rapport à un complexe quelconque du faisceau est :

$$\Sigma(A_{hl} + \lambda B_{hl}) \begin{vmatrix} X_i & X_k \\ x_i & x_k \end{vmatrix} = 0,$$

équation de la forme :

$$P + \lambda Q = 0.$$

Remarquons qu'il en résulte que tous les plans polaires d'un point, par rapport aux complexes d'un faisceau, forment un faisceau de plans. L'axe de ce faisceau de plans est la droite de la congruence linéaire, commune aux deux complexes, qui passe par le point considéré. Considérons alors quatre complexes quelconques du faisceau, le rapport anharmonique des quatre plans polaires d'un même point dans ces quatre complexes est égal au rapport anharmonique des quatre quantités λ correspondantes. Prenons en particulier les deux complexes de base et les complexes spéciaux. Les valeurs de λ correspondantes sont 0, ∞, et les racines de l'équation

$$\Sigma(A_{14} + \lambda B_{14})(A_{23} + \lambda B_{23}) = 0\,;$$

et la condition pour que les deux premières soient conjuguées harmoniques par rapport aux deux autres est :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

ou $\Delta_{AB} = 0$. Or, si le point considéré se trouve sur la droite (D), ses plans polaires par rapport aux deux complexes spéciaux, sont précisément les plans (D) (Δ) et (D) (Δ') ; *donc si deux complexes sont en involution, les plans polaires d'un point dans ces deux complexes sont conjugués harmoniques par rapport aux plans passant par ce point et par les directrices de la congruence commune aux deux complexes, et réciproquement.*

Cela équivaut bien à dire que l'homographie (H) est une involution. La propriété analogue, relative à l'homographie (H'), s'établirait de même, en utilisant les coordonnées tangentielles q_{hl}, au lieu des coor-

données ponctuelles p_{ik}. La propriété de deux complexes d'être en involution se correspond donc à elle-même, par dualité ; et l'on peut dire encore : *Les pôles d'un plan quelconque par rapport aux complexes d'un faisceau sont sur une droite qui rencontre les directrices de la congruence commune à ces complexes. Si deux complexes sont en involution, les pôles d'un plan quelconque par rapport à ces complexes sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la droite qui les joint avec les deux directrices de la congruence commune à ces complexes ; et réciproquement.*

Coordonnées symétriques d'une droite. — On peut généraliser encore les coordonnées de droites. Reprenons la relation fondamentale

$$(1) \qquad ap + bq + cr = 0\,;$$

elle est homogène et du deuxième degré. Or il existe un type remarquable d'équations du deuxième degré, celui où ne figurent que les carrés. Pour ramener à cette forme la relation précédente, il suffit, par exemple, de poser :

$$(2) \qquad \begin{cases} a + p = t_1, & b + q = t_3, & c + r = t_5, \\ a - p = it_2, & b - q = it_4, & c - r = it_6. \end{cases}$$

La condition devient ainsi :

$$(3) \qquad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_6^2 = 0.$$

On introduit comme coordonnées homogènes les t_h, qui sont des fonctions linéaires homogènes des coordonnées pluckériennes. En égalant ces six coordonnées à 0, on obtient les équations de six complexes qui sont deux à deux en involution, car on voit facilement que la condition pour que les deux complexes

$$\Sigma A_k t_k = 0, \qquad \Sigma B_k t_k = 0,$$

soient en involution est :

$$(4) \qquad \Sigma A_k B_k = 0.$$

Ces résultats subsistent si on substitue à a, b, c, p, q, r, dans la définition des coordonnées t_h, les coordonnées générales p_{ik} : et si on remplace, plus généralement encore, les t_h par les coordonnées qu'on en déduit par une transformation linéaire homogène, orthogonale, à six variables.

Droites conjuguées

6. — Considérons un complexe (C), non spécial, et une droite (Δ) n'appartenant pas à ce complexe; considérons la congruence commune à (C) et au complexe spécial de directrice (Δ); cette congruence a une deuxième directrice (Δ') qui est dite la *droite conjuguée* de (Δ). Il y a évidemment réciprocité entre ces deux droites. *Toutes les droites du complexe* (C) *qui rencontrent la droite* (Δ) *rencontrent sa conjuguée* (Δ'), puisque ce sont des droites de la congruence, et inversement *toute droite rencontrant à la fois les deux droites conjuguées* (Δ), (Δ'), *appartient à la congruence, et par suite au complexe.* Si on considère un point A de (Δ), son plan polaire passe par (Δ'), puisque toutes les droites passant par A et rencontrant (Δ') appartiennent au complexe. Donc (Δ') *est l'enveloppe des plans polaires des points de sa conjuguée* (Δ). On voit de même *que* (Δ') *est le lieu des pôles des plans passant par sa conjuguée* (Δ). Si la droite (Δ) appartient au complexe (C), la congruence précédente a ses deux directrices confondues. *Les droites du complexe sont à elles-mêmes leurs conjuguées.*

Soit l'équation du complexe

$$F(a, b, c, p, q, r) = Pa + Qb + Rc + Ap + Bq + Cr = 0.$$

Cherchons les coordonnées (a_2, b_2, c_2, p_2, q_2, r_2) de la conjuguée d'une droite ($a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1$). Il suffit d'exprimer que le complexe donné, et les complexes spéciaux ayant pour directrices les droites (a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, p_2, q_2, r_2), appartiennent à un même faisceau, ce qui donne :

$$P + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0, \quad \text{et les analogues.}$$

Multiplions respectivement par a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1 et ajoutons membre à membre, le coefficient de λ_1 disparaît et nous obtenons :

$$F(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) + \lambda_2 \Sigma(a_1 p_2 + p_1 a_2) = 0.$$

Posons pour abréger :

$$\Sigma(a_1 p_2 + p_1 a_2) = \sigma,$$

ce qui donne :

$$(1) \qquad F(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) + \lambda_2 \sigma = 0.$$

Si nous multiplions par a_2, b_2, c_2, p_2, q_2, r_2 et si nous ajoutons, c'est le coefficient de λ_2 qui disparaîtra et nous aurons :

$$(2) \qquad F(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) + \lambda_1 \sigma = 0.$$

Enfin si nous multiplions par A, B, C, P, Q, R, nous obtenons, en posant :

$$\Delta = \mathrm{AP} + \mathrm{BQ} + {}_1\mathrm{CR}.$$

$$2\Delta + \lambda_1 \mathrm{F}(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) + \lambda_2 \mathrm{F}(a_2, b_2, c_2, p_2, q_2, r_2) = 0\,;$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de (1) et (2),

$$\Delta = \lambda_1 \lambda'_2 \sigma,$$

d'où :
$$\lambda_1 = \frac{\Delta}{\lambda'_2 \sigma} = -\frac{\Delta}{\mathrm{F}(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1)}.$$

Nous pouvons donc prendre pour coordonnées de la droite conjuguée

$$a_2 = \mathrm{A} - \frac{\Delta a_1}{\mathrm{F}(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1)},$$ et les analogues ;

ou :

(3) $\qquad a_2 = \mathrm{AF}(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) - \Delta a_1$, et les analogues.

Supposons qu'on prenne deux droites conjuguées pour arêtes opposées du tétraèdre de référence. Si nous appelons x, y, z, t les coordonnées tétraédriques, nous avons vu que :

$$\left\{\begin{array}{lll} a = xt' - tx', & b = yt' - ty', & c = zt' - tz', \\ p = yz' - zy', & q = zx' - xz', & r = xy' - yx'. \end{array}\right.$$

Supposons qu'on prenne pour droites conjuguées les droites ($x = 0$, $y = 0$) et ($z = 0$, $t = 0$). Leurs coordonnées sont :

$$\begin{array}{llllll} a_1 = 0, & b_1 = 0, & c_1 \quad, & p_1 = 0, & q_1 = 0, & r_1 = 0\,; \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = 0, & p_2 = 0, & q_2 = 0, & r_2 \quad . \end{array}$$

Exprimons que ces droites sont conjuguées. Les conditions trouvées précédemment nous donnent :

$$0 = \mathrm{AF}(a_1, ..), \quad 0 = \mathrm{BF}(a_1, ..), \quad 0 = \mathrm{CF} - \Delta c_1, \quad 0 = \mathrm{PF}, \quad 0 = \mathrm{QF},$$
$$r_2 = \mathrm{RF}.$$

Or :

$$\mathrm{F}(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) = \mathrm{F}(o, o, c_1, o, o, o) = \mathrm{R}c_1\,;$$

il en résulte, Δ n'étant pas nul, par hypothèse, que :

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{P} = 0, \quad \mathrm{Q} = 0, \quad \mathrm{R} \neq 0, \quad \mathrm{C} \neq 0.$$

Alors :

$$\Delta = \mathrm{RC},$$

et l'équation du complexe prend la forme réduite :

$$\mathrm{C}r + \mathrm{R}c = 0,$$

ou :

$$(4) \qquad r = kc.$$

En particulier, cherchons à effectuer cette réduction en axes cartésiens. Nous prendrons pour droites conjuguées l'axe Oz et la droite de l'infini du plan des xy. Il faut d'abord montrer qu'il y a des droites dont la conjuguée peut être rejetée à l'infini. Pour qu'une droite $(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1)$ soit à l'infini, il faut et il suffit que $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$; et, d'après les formules précédemment trouvées, les conjuguées de ces droites sont telles que :

$$\frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B} = \frac{c_2}{C} = \frac{F(o, o, o, p_1, q_1, r_1)}{\Delta};$$

a_2, b_2, c_2 sont donc proportionnels à des quantités fixes. *Les conjuguées des droites de l'infini sont parallèles à une même direction. Ces droites sont les lieux des pôles des plans parallèles à un plan fixe.* On les appelle *diamètres,* et les plans parallèles dont les pôles sont sur un diamètre, sont dits conjugués à ce diamètre. En rapportant donc un complexe à un diamètre et au plan conjugué, l'équation du complexe est de la forme :

$$r = kc.$$

On peut obtenir cette réduction en axes rectangulaires. Il existe, en effet, une infinité de droites perpendiculaires à leurs conjuguées. Elles sont définies par la relation :

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$

ou :

$$(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1)\, F(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) - \Delta(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 0.$$

Ces droites constituent donc un complexe du deuxième degré.

Prenons un diamètre quelconque $(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1)$ du complexe linéaire. Le plan conjugué, passant par l'origine et par la droite à l'infini, conjuguée de ce diamètre (o, o, o, p_2, q_2, r_2), a pour équation :

$$p_2X + q_2Y + r_2Z = 0 ;$$

la condition pour qu'il soit perpendiculaire au diamètre est :

$$\frac{a_1}{p_2} = \frac{b_1}{q_2} = \frac{c_1}{r_2},$$

ou :

$$\frac{a_1}{PF_1 - \Delta p_1} = \frac{b_1}{QF_1 - \Delta q_1} = \frac{c_1}{RF_1 - \Delta r_1};$$

en posant, pour abréger,

$$F_1 = F(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1).$$

La droite conjuguée du diamètre étant à l'infini. $a_2 = b_2 = c_2 = 0$; donc a_1, b_1, c_1 sont proportionnels à A, B, C. d'après les formules (3), ce qui donne :

$$\frac{A}{PF_1 - \Delta p_1} = \frac{B}{QF_1 - \Delta q_1} = \frac{C}{RF_1 - \Delta r_1} \cdot$$

Or

$$a_1 p_1 + b_1 q_1 + c_1 r_1 = 0,$$

ce qui donne ici

$$Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 = 0 :$$

donc

$$F_1 = F(a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1) = Pa_1 + Qb_1 + Rc_1.$$

Multiplions alors les deux termes des rapports précédents respectivement par A, B, C et ajoutons, nous obtenons le rapport égal $\frac{\Sigma A^2}{\Delta F_1}$: nous pouvons prendre $a_1 = A$, $b_1 = B$, $c_1 = C$ d'où $F_1 = \Delta$, et enfin

$$\frac{A}{P\Delta - p_1 \Delta} = \frac{\Sigma A^2}{\Delta^2}, \text{ et les analogues ;}$$

d'où les formules définitives

$$(5) \qquad a_1 = A, \; b_1 = B, \; c_1 = C,$$

$$p_1 = P - \frac{A\Delta}{\Sigma A^2}, \qquad q_1 = Q - \frac{B\Delta}{\Sigma B^2}, \qquad r_1 = R - \frac{C\Delta}{\Sigma C^2}.$$

Nous obtenons ainsi un diamètre, et un seul, perpendiculaire au plan conjugué : c'est l'*axe du complexe*. En le prenant pour axe des z, on obtient l'équation réduite en coordonnées rectangulaires

$$r - mc = 0.$$

Le complexe ne dépend, quant à sa forme, que d'un seul paramètre m, qui est son invariant par rapport au groupe des mouvements.

Si $r = 0$, $c = 0$, l'équation est satisfaite ; or $r = 0$, $c = 0$ sont les coordonnées des droites rencontrant Oz et perpendiculaires à Oz. *Le complexe contient toutes les droites rencontrant l'axe et perpendiculaires à l'axe ;* c, r sont des coordonnées qui ne changent pas si on fait tourner la droite autour de Oz : de même si on la déplace parallèlement à Oz. Autrement dit *un mouvement hélicoïdal d'axe* Oz *laisse le complexe inaltéré. Il en résulte que si on a* ∞^1 *droites appartenant au complexe et ne dérivant pas les unes des autres par un mouvement hélicoïdal, on obtiendra toutes les droites du complexe en faisant subir à ce système de droites les translations et rotations précédentes.* Considérons les droites dont les coordonnées a, p sont

nulles, et cherchons parmi ces droites celles qui appartiennent au complexe; nous trouvons les droites

$$bx = mc, \qquad cy - bz = 0,$$

qui constituent une famille de génératrices du paraboloïde

$$xy - mz = 0.$$

Par conséquent, *pour obtenir toutes les droites d'un complexe, il suffit de prendre un système de génératrices d'un paraboloïde équilatère et de lui faire subir tous les déplacements hélicoïdaux ayant pour axe l'axe du paraboloïde.*

Réseau de complexes

7. — $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$ étant les équations de trois complexes linéaires, un *réseau de complexes* sera défini par l'équation

$$\lambda\Phi + \lambda'\Phi' + \lambda''\Phi'' = 0.$$

Considérons les droites communes à tous les complexes du réseau, c'est-à-dire communes aux trois complexes $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$. $\Phi'' = 0$; il y en a ∞^1; elles appartiennent aux complexes spéciaux du réseau, on peut les définir, *en général*, au moyen de trois de ces complexes spéciaux. Or un complexe spécial est formé de toutes les droites rencontrant sa directrice; les droites précédentes rencontrent donc trois droites fixes quelconque, elles constituent un système de génératrices d'une quadrique, le deuxième système de génératrices comprenant les directrices des complexes spéciaux du réseau.

Application. — On peut définir un complexe par cinq droites n'appartenant pas à une même congruence linéaire. Soient en effet les droites 1, 2, 3, 4, 5; donnons nous un point P et cherchons-en le plan polaire. Considérons les droites 1, 2, 3, 4; il existe deux droites (Δ), (Δ'), qui rencontrent ces quatre droites : ces droites sont conjuguées par rapport au complexe, et alors la droite passant par P et s'appuyant sur (Δ), (Δ'), appartient au complexe. De même en considérant les droites 2, 3, 4, 5, nous aurons une deuxième droite passant par P et appartenant au complexe; le plan polaire de P est alors déterminé par ces deux droites.

Remarque.—Pour trouver les droites communes à quatre complexes

$$\Phi = 0, \qquad \Phi' = 0, \qquad \Phi'' = 0, \qquad \Phi''' = 0,$$

on pourra, de même, *en général*, substituer, à ces complexes, quatre

des complexes spéciaux contenus dans la famille des ∞^3 complexes.

$$\lambda\Phi + \lambda'\Phi' + \lambda''\Phi'' + \lambda'''\Phi''' = 0.$$

Le problème revient ainsi à trouver les droites qui rencontrent quatre droites fixes quelconques ; et a, comme on sait, deux solutions.

Courbes du complexe

8. — Proposons-nous de déterminer les courbes du complexe

$$r = kc.$$

Considérons une droite passant par un point (x, y, z) et de coefficients directeurs a, b, c; pour qu'elle appartienne au complexe, il faut et il suffit que

$$bx - ay = kc.$$

L'équation différentielle des courbes du complexe est donc

$$xdy - ydx = k.dz. \tag{1}$$

Cette équation s'écrit

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = d(kz).$$

Posons

$$kz = \mathrm{Y}, \qquad \frac{y}{x} = \mathrm{X}, \qquad x^2 = \mathrm{P}; \tag{2}$$

l'équation précédente devient

$$d\mathrm{Y} - \mathrm{P}d\mathrm{X} = 0;$$

elle montre que P est la dérivée de Y par rapport à X. On obtient donc l'intégrale générale de (1) en faisant, dans les équations (2),

$$\mathrm{X} = \varphi(t), \qquad \mathrm{Y} = \psi(t), \qquad \mathrm{P} = \frac{d\psi}{d\varphi}. \tag{3}$$

On obtient ainsi x, y, z exprimées en fonction d'une variable arbitraire t au moyen de deux fonctions arbitraires. Si on prend pour variable indépendante X, il suffira de poser :

$$\mathrm{Y} = f(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{P} = f'(\mathrm{X});$$

d'où les équations de la courbe :

$$kz = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x^2 = f'\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

En posant enfin :

$$\frac{y}{x} = u.$$

on obtient les expressions de x, y, z en fonction de u :

$$(5) \qquad x = \sqrt{f'(u)}, \qquad y = u\sqrt{f'(u)}, \qquad z = \frac{1}{k}f(u).$$

Il est facile, en particularisant la forme de la fonction f, d'obtenir des courbes remarquables du complexe.

1° On obtiendra toutes les courbes algébriques du complexe en prenant pour f une fonction algébrique de u. Posons en particulier

$$f(u) = \frac{u^3}{3}$$

alors

$$f'(u) = u^2$$

d'où

$$(6) \qquad x = u, \qquad y = u^2, \qquad z = \frac{u^3}{3k};$$

ces équations sont celles d'une cubique gauche osculatrice au plan de l'infini dans la direction $x = 0$, $y = 0$. Réciproquement on peut par une transformation projective ramener les équations de toute cubique gauche à la forme précédente, d'où il résulte que *les tangentes à toute cubique gauche appartiennent à un complexe linéaire.*

2° Les formules générales (5) contiennent un radical, provenant de ce qu'on a posé $x^2 = P$. On fera disparaître le radical en choisissant le paramètre de façon que P soit carré parfait. Pour cela considérons la courbe plane $X = \varphi(t)$, $Y = \psi(t)$, comme enveloppe de la droite

$$Y - u^2X + 2\theta(u) = 0;$$

X, Y sont tels que

$$\frac{dY}{dX} = u^2;$$

et l'enveloppe est définie par l'équation de la droite et par

$$-uX + \theta'(u) = 0;$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{\theta'(u)}{u}, \qquad Y = u\theta'(u) - 2\theta(u);$$

d'où

$$(7) \qquad x = u, \qquad y = \theta'(u), \qquad z = \frac{1}{k}\Big[u\theta'(u) - 2\theta(u)\Big].$$

Ces formules permettent de trouver toutes les courbes unicursales du complexe ; il n'y a qu'à prendre pour u une fonction rationnelle d'un paramètre arbitraire, et pour θ une fonction rationnelle de u.

3. — L'équation différentielle (1) s'écrit encore :

$$(x^2 + y^2)\, d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = k dz\,;$$

posons :

$$kz = Y, \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = X, \qquad x^2 + y^2 = P = \frac{dY}{dX}.$$

En prenant X comme variable indépendante, on obtient l'intégrale générale sous la forme :

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \omega, \qquad kz = f(\omega), \qquad x^2 + y^2 = f'(\omega)\,;$$

Ce qui s'écrit :

$$(8) \qquad x = \sqrt{f'(\omega)} \cos \omega, \qquad y = \sqrt{f'(\omega)} \sin \omega, \qquad z = \frac{1}{k} f(\omega).$$

On obtient des courbes particulières en prenant :

$$f(\omega) = R^2 \omega + C\,;$$

d'où :

$$(9) \qquad x = R \cos \omega, \qquad y = R \sin \omega, \qquad z = \frac{R^2}{k}\omega + a.$$

Ce sont des hélices tracées sur des cylindres de révolution autour de l'axe du complexe. Le pas de ces hélices $\frac{2\pi R^2}{k}$ est uniquement fonction de R ; donc *toutes les hélices du complexe tracées sur un même cylindre ayant l'axe du complexe pour axe ont même pas.*

Propriétés générales des courbes du complexe

Il résulte immédiatement de la définition des courbes d'un complexe que, *dans un complexe linéaire, le plan polaire d'un point d'une courbe du complexe est le plan osculateur à la courbe en ce point* [Ch. IX, § 1]. Considérons alors les plans osculateurs à une courbe du complexe issus d'un point P. Soit A l'un des points de contact ; le plan osculateur en A étant le plan polaire de A, la droite PA appartient au complexe, et par suite est dans le plan polaire de P. Il en résulte que *les points de contact des plans osculateurs issus d'un point à une*

courbe d'un complexe linéaire sont dans un même plan passant par ce point. En particulier *les points de contact des plans osculateurs issus d'un point à une cubique gauche sont dans un même plan passant par le point donné.*

Prenons les formules (7). Nous trouvons :

$$A = y'z'' - z'y'' = \frac{1}{k}\theta'\theta''' = \frac{y}{k}\theta''',$$

$$B = z'x'' - x'z'' = -\frac{u}{k}\theta''' = -\frac{x}{k}\theta''',$$

$$C = x'y'' - y'x'' = \theta''';$$

et

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \frac{1}{k}\theta'''^2.$$

On voit alors que la torsion au point (x, y, z) est donnée par

$$T = -\frac{x^2 + y^2 + k^2}{k};$$

Elle ne dépend que du point, et pas de la courbe. Donc *toutes les courbes du complexe linéaire passant par un point ont même torsion en ce point* (*Sophus Lie*).

Surfaces normales du complexe

9. — Il n'y a pas lieu de rechercher les surfaces d'un complexe linéaire. Soit en effet le complexe linéaire

$$ay - bx + kc = 0;$$

le plan polaire du point (x, y, z) est parallèle au plan

$$Xy - Yx + kZ = 0,$$

et pour qu'une surface $z = f(x,y)$ fût tangente à ce plan, il faudrait que :

$$\frac{p}{y} = \frac{q}{-x} = \frac{-1}{k},$$

ou

$$p = -\frac{y}{k}, \qquad q = \frac{x}{k}.$$

Or la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

n'est pas réalisée. Le problème est donc impossible.

Cherchons alors les surfaces dont les normales sont des droites du complexe. Nous aurons à intégrer l'équation aux dérivés partielles

$$py - qx - k = 0,$$

ce qui revient à l'intégration du système

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{k} = -dt,$$

qui est précisément le système auquel on arrive lorsqu'on recherche les courbes normales aux plans polaires de leurs points. Ce système s'écrit :

$$dx = -y.dt, \quad dy = x.dt, \quad dz = -k.dt;$$

et s'intègre immédiatement. Comme t n'est défini qu'à une constante additive près, l'intégrale générale s'écrira :

$$x = \mathrm{R} \cos t, \quad y = \mathrm{R} \sin t, \quad z = -kt + h.$$

Ces trajectoires orthogonales dépendent de deux constantes arbitraires. Ce sont des hélices circulaires ayant toutes même pas, trajectoires d'un mouvement hélicoïdal uniforme de pas $-2k\pi$.

De là l'*interprétation cinématique du complexe linéaire* : considérons un mouvement hélicoïdal uniforme ; à chaque point M correspond la vitesse de ce point, et le plan polaire du point M dans le complexe est le plan perpendiculaire à cette vitesse. *Le complexe linéaire est constitué par les normales aux vitesses du mouvement instantané d'un corps solide.*

Les surfaces normales du complexe sont définies par les équations

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = -ku + \varphi(v);$$

car elles sont engendrées par les hélices précédentes. Ce sont les hélicoïdes engendrés par un profil quelconque dans le mouvement précédent. Les équations précédentes représentent d'ailleurs l'hélicoïde le plus général. Il en résulte que *les normales issues d'un point à un hélicoïde sont dans un même plan* (plan polaire de ce point).

Remarque. — Les hélices trajectoires orthogonales des plans polaires s'obtiennent en faisant $v = \mathrm{c^{te}}$, et leurs trajectoires orthogonales sont les courbes du complexe situées sur les surfaces précédentes. Cherchons-les. Formons l'élément linéaire sur ces surfaces :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\cos u . dv - v . \sin u . du)^2 + (\sin u . dv + v . \cos u . du)^2 + (- k\, du + \varphi' . dv)^2,$$

ou :

$$ds^2 = (v^2 + k^2) du^2 - 2k\varphi' . du dv + (1 + \varphi'^2) . dv^2.$$

Les trajectoires orthogonales des hélices $v = c^{te}$, $dv = 0$, sont définies par l'équation

$$(v^2 + k^2)\, du - k\varphi' . dv = 0$$

d'où :

$$u = \int \frac{k\varphi'}{k^2 + v^2}\, dv.$$

Leur détermination dépend d'une quadrature.

Surfaces réglées du complexe

10\. — Considérons une surface réglée dont les génératrices appartiennent au complexe; soit (G) une de ses génératrices; elle appartient au complexe, donc à chacun de ses points M correspond un plan (P) qui en est le plan focal ; d'autre part au point M correspond aussi homographiquement le plan tangent à la surface en ce point ; il en résulte qu'*il y a correspondance homographique entre le plan polaire d'un point de la génératrice et le plan tangent à la surface en ce point ;* dans cette homographie il y a deux éléments doubles, donc *sur chaque génératrice de la surface il existe deux points,* A, B, *tels que les plans polaires de ces points soient tangents à la surface.* Considérons le lieu des points A sur la surface ; en chacun de ces points le plan tangent à la surface est le plan polaire de A ; la tangente à la courbe, qui est dans le plan tangent à la surface, est donc dans le plan polaire; donc *le lieu des points* A, *et aussi le lieu des points* B, *qui peuvent d'ailleurs se confondre algébriquement, sont des courbes du complexe.* Le plan osculateur en chaque point est le point polaire, donc il est tangent à la surface; *ces courbes sont donc des asymptotiques de la surface réglée ;* les asymptotiques se déterminent dès lors au moyen d'une seule quadrature [Ch. V, § 10].

Il peut arriver que les génératrices de la surface appartiennent à une congruence linéaire ; elles appartiennent alors à une infinité de complexes linéaires, et pour chaque complexe, on aura deux lignes asymptotiques, courbes de ce complexe. On obtiendra ainsi toutes les asymptotiques sans aucune intégration. *Les génératrices de la sur-*

face précédente s'appuient alors sur deux directrices fixes. C'est le cas des conoïdes à plan directeur et des surfaces réglées générales du troisième ordre [Ch. V, § 10, p. 113]. Inversement on verrait facilement qu'une courbe quelconque du complexe est asymptotique d'une infinité de surfaces réglées du complexe; on peut donc au moyen de ces surfaces réglées trouver une courbe quelconque du complexe.

Si les génératrices de la surface appartiennent à un complexe linéaire spécial, les courbes du complexe sont des courbes planes dont les plans contiennent la directrice du complexe; *les surfaces normales du complexe sont de révolution autour de la directrice; les surfaces réglées du complexe sont des surfaces dont les génératrices rencontrent une droite fixe ;* cette directrice est une asymptotique de la surface, et les autres asymptotiques se déterminent par deux quadratures.

CHAPITRE XI

TRANSFORMATIONS DE CONTACT. — TRANSFORMATIONS DUALISTIQUES. — TRANSFORMATION DE SOPHUS LIE, CHANGEANT LES DROITES EN SPHÈRES

Eléments et multiplicités de contact

1\. — Reprenons d'abord, en les complétant, les notions de la géométrie des éléments de contact, introduites au chapitre VI, § 4, et souvent utilisées dans les chapitres suivants :

Un *élément de contact* est l'ensemble d'un point M et d'un plan (P) passant par ce point. Un tel élément est défini par ses cinq *coordonnées :* les coordonnées (x, y, z) du point, et les coefficients de direction $(p, q, -1)$ de la normale au plan.

Considérons un point A, les éléments de contact de ce point sont formés par ce point et tous les plans passant par ce point ; les coordonnées x, y, z sont fixes, et p, q arbitraires. Un point possède donc ∞^2 éléments de contact.

Considérons une courbe ; un de ses éléments de contact est formé d'un point de la courbe et d'un plan tangent à la courbe en ce point ; les coordonnées sont : x, y, z, fonctions d'un paramètre arbitraire u, et p, q liés par la relation :

$$p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du}-\frac{dz}{du}=0.$$

Il y a donc deux paramètres arbitraires. Une courbe possède ∞^2 éléments de contact.

Considérons maintenant une surface ; un de ses éléments de contact est formé par un point et le plan tangent en ce point ; ses coordonnées sont $x, y, z=f(x, y), p=\frac{\partial f}{\partial x}, q=\frac{\partial f}{\partial y}$. Il y a deux paramètres arbitraires, donc une surface possède ∞^2 éléments de contact. Remarquons que p, q peuvent ne dépendre que d'un seul paramètre ; c'est le cas des surfaces développables, qui possèdent ainsi ∞^2 points et ∞^1 plans tangents, et correspondent par dualité aux courbes, qui possèdent ∞^1 points et ∞^2 plans tangents.

Les points, courbes et surfaces, qui sont engendrées par ∞^2 éléments de contact, sont appelés *multiplicités* M_2. Plus généralement on appellera *multiplicité* toute famille d'éléments de contact dont les coordonnées vérifient la relation :

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{1}$$

Si ces coordonnées ne dépendent que d'un paramètre arbitraire, on aura les *multiplicités* M_1 ; si elles dépendent de deux paramètres arbitraires, on aura les *multiplicités* M_2.

Cherchons à déterminer toutes les multiplicités M_2 : Les coordonnées x, y, z, p, q sont fonctions de deux paramètres arbitraires :

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \quad p = k(u, v), \quad q = l(u, v).$$

Considérons les trois premières relations ; on peut éliminer entre elles u, v ; et, par suite de cette élimination, on peut obtenir une, ou deux, ou trois relations.

Supposons d'abord qu'on obtienne une relation :

$$F(x, y, z) = 0$$

z, par exemple, est alors fonction de x, y ; et si on écrit que la relation (1) est satisfaite quels que soient x, y, on obtient :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ce qui donne les éléments de contact d'une surface.

Supposons qu'on obtienne deux relations :

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 ;$$

deux des coordonnées sont fonctions de la troisième ; par exemple x, y sont fonctions de z :

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z),$$

ces équations définissent une courbe et l'équation (1) devient :

$$dz - p\varphi'(z)dz - q\psi'(z)dz = 0,$$

ou :

$$p\varphi'(z) + q\psi'(z) - 1 = 0.$$

Le plan de l'élément de contact est donc tangent à la courbe, et n'est assujetti qu'à cette condition : on obtient donc les éléments de contact d'une courbe.

Enfin si on obtient trois relations, c'est que x, y, z sont des constantes ; l'équation (1) est vérifiée quels que soient p, q, qui sont alors des paramètres arbitraires, et on a les éléments de contact d'un point.

Cherchons maintenant les multiplicités M_1 ; x, y, z, p, q sont fonctions d'un seul paramètre :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad p = k(t), \quad q = l(t).$$

Considérons les trois premières équations, et entre elles éliminons t. Nous obtenons deux ou trois relations.

S'il y a deux relations, le lieu des points de la multiplicité, qu'on appelle aussi *support de la multiplicité*, est une courbe, et les plans ne dépendant que d'un paramètre, à chaque point de la courbe correspond un plan tangent déterminé ; on a une *bande d'éléments de contact*.

S'il y a trois relations, x, y, z sont des constantes, le support est un point ; on a alors une famille de plans dépendant d'un paramètre et passant par un point fixe ; c'est ce qu'on appelle un *cône élémentaire*.

Considérons deux multiplicités M_2 ; elles peuvent avoir en commun zéro ou un élément de contact, ou une infinité.

Considérons le cas d'*un élément de contact commun* ; si les multiplicités sont deux points A, A′, il ne peut y avoir un élément de contact commun que si les deux points sont confondus, et alors il y a ∞^2 éléments de contact communs.

Si les multiplicités sont un point et une courbe, le point est sur la courbe, et tous les plans tangents à la courbe en ce point appartiennent à des éléments de contact communs, qui sont ainsi au nombre de ∞^1.

Si les multiplicités sont un point et une surface, le point sera sur la surface, et l'élément de contact commun sera unique et constitué par le point et le plan tangent à la surface en ce point.

Considérons deux courbes ; si elles ont un élément de contact commun, elles se rencontrent en un point, et si elles n'y sont pas tangentes, il n'y a qu'un élément de contact commun.

Considérons une courbe et une surface ; il y aura un élément de contact commun si la courbe est tangente à la surface.

Enfin deux surfaces ont un élément de contact commun si elles sont tangentes en un point.

Il y aura ∞^1 *éléments de contact communs* pour un point sur une courbe, deux courbes tangentes en un point, une courbe située sur une surface, deux surfaces circonscrites le long d'une courbe.

Considérons un *point qui décrit une courbe ;* nous avons une

famille de ∞^1 points dont chacun donne à la courbe ∞^1 éléments de contact.

Considérons une *surface engendrée par une courbe* : nous avons ∞^1 courbes dont chacune a en commun avec la surface une bande, et par suite donne à la surface ∞^1 éléments de contact.

Considérons *la surface enveloppe de* ∞^1 *surfaces ;* chaque enveloppée a en commun avec l'enveloppe une bande de ∞^1 éléments de contact. Dans les trois cas, nous avons ∞^1 multiplicités M_2 génératrices, donnant chacune à la multiplicité engendrée ∞^1 éléments de contact.

Considérons le cas où chaque élément générateur ne donne au contraire qu'un élément de contact à la multiplicité engendrée : ∞^2 points engendrant une surface ; ∞^2 courbes formant une congruence de courbes (dans ce cas, comme dans celui des congruences de droites, il y a en général une surface focale, tangente à chacune de ces courbes, et ayant avec chacune un élément de contact commun) ; enfin si on considère ∞^2 surfaces, elles ont une enveloppe qui a en commun avec chacune d'elles un élément de contact.

Remarques. — 1° Dans les trois cas précédents, quand nous disons que chaque élément générateur donne un élément de contact à la multiplicité, il faut entendre que cette multiplicité peut se décomposer en nappes, et que cela s'applique alors à chacune des nappes séparément.

2° Il y a un cas exceptionnel, celui de ∞^1 courbes ayant une courbe pour enveloppe ; on a alors ∞^1 courbes donnant chacune à cette enveloppe ∞^1 éléments de contact.

Transformations de contact

2. — On appelle *transformation de contact* toute transformation des éléments de contact qui change toute multiplicité M_2 en une multiplicité M_2. Une telle transformation est définie par cinq équations :

$$(1)\quad x' = f(x, y, z, p, q),\quad y' = g(x, y, z, p, q),\quad z' = h(x, y, z, p, q),$$
$$p' = k(x, y, z, p, q),\qquad q' = l(x, y, z, p, q).$$

Si l'élément de contact variable (x, y, z, p, q) appartient à une multiplicité, ses coordonnées vérifient la condition :

$$(2)\qquad dz - pdx - qdy = 0,$$

et, pour que l'élément transformé (x', y', z', p', q') appartienne aussi à une multiplicité, il faut et il suffit que :

$$(2') \qquad dz' - p'dx' - q'dy' = 0.$$

Une transformation de contact est donc définie par des équations (1) telles que chacune des équations de Pfaff (2), (2') se transforme en l'autre quand on y fait le changement de variables défini par ces équations. C'est ce qu'on exprime en disant que les transformations de contact sont les transformations en x, y, z, p, q qui laissent invariante l'équation de Pfaff (2).

Une telle transformation change deux multiplicités ayant un élément de contact commun en deux multiplicités ayant un élément de contact commun ; et de même deux multiplicités ayant ∞^1 éléments de contact communs en deux multiplicités ayant ∞^1 éléments de contact communs. Une transformation de contact change les points, courbes et surfaces en points, courbes, ou surfaces, indistinctement.

Reprenons les équations de la transformation, et entre elles éliminons p, q, p', q', nous obtenons une, ou deux, ou trois relations entre x, y, z ; x', y', z'.

Transformations ponctuelles prolongées. — Si on obtient trois relations :

$$(3) \qquad x' = f(x, y, z), \qquad y' = g(x, y, z), \qquad z' = h(x, y, z),$$

dans la transformation de contact est contenue une transformation ponctuelle. Une telle transformation change un point en point, une courbe en courbe, une surface en surface ; deux courbes qui se rencontrent se transforment en deux courbes qui se rencontrent, deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes. A un élément de contact, commun à deux multiplicités, correspond un élément de contact commun aux deux multiplicités transformées. On obtiendra p', q' en fonction de p, q en considérant z' comme fonction de x', y'. Alors :

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} (pdx + qdy), \quad dy' = \ldots, \ dz' = \ldots$$

Eliminant dx, dy entre ces trois relations, on obtient une équation de la forme :

$$dz' = k(x, y, z, p, q)\, dx' + l(x, y, z, p, q)\, dy',$$

d'où :

$$p' = k(x, y, z, p, q), \qquad q' = l(x, y, z, p, q).$$

On dit, dans ce cas, que la transformation de contact est une *transformation ponctuelle prolongée*.

Cas d'une seule équation directrice

3. — Supposons maintenant que l'on obtienne une relation d'élimination

$$\Omega(x, y, z ; x', y', z') = 0. \tag{4}$$

Considérons un point A (x, y, z) du premier espace ; cherchons la multiplicité qui lui correspond dans le deuxième espace ; elle est engendrée par des éléments de contact dont les points sont liés au point A par l'équation (4) qui représente une surface S'_A. La multiplicité correspondant à un point est une surface. Si on a une courbe lieu de points A, il lui correspond une famille de ∞^1 surfaces, et la multiplicité engendrée par ces surfaces, c'est-à-dire leur enveloppe, sera la transformée de la courbe. Enfin si on a une surface lieu de ∞^2 points A, il leur correspondra ∞^2 surfaces dont l'enveloppe correspondra à la surface donnée.

L'équation (4) s'appelle *l'équation directrice* de la transformation ; elle définit les surfaces homologues, dans le deuxième espace, des points du premier espace ; et inversement.

Transformations dualistiques

Supposons, en particulier, la relation (4) bilinéaire en $x, y, z; x', y', z'$. A chaque point du premier espace correspond un plan du deuxième espace, et réciproquement. A ∞^3 points du premier espace correspondent ∞^3 plans distincts. Soit

$$\Omega = Ax' + By' + Cz' + D.$$

où :

$$A = ux + vy + wz + h, \qquad B = u'x + \ldots, \qquad C = u''x + \ldots,$$
$$D = u'''x + \ldots$$

Pour avoir la transformée d'une surface

$$f(x', y', z') = 0$$

il faut prendre l'enveloppe des plans $\Omega = 0$, x', y', z' étant liés par la relation précédente, ce qui donne :

$$\frac{A}{\frac{\partial f}{\partial x'}} = \frac{B}{\frac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{C}{\frac{\partial f}{\partial z'}} = \frac{D}{\frac{\partial f}{\partial t'}}.$$

Telles sont les équations de la transformation. Il faudra que l'on en puisse tirer x, y, z, donc que les formes A, B, C, D soient indépendantes, et alors l'ensemble des plans $\Omega = 0$ constitue bien l'ensemble de tous les plans de l'espace. La transformation précédente est une *transformation dualistique*.

Remarquons que l'ensemble des transformations de contact forme évidemment un *groupe* [Cf. p. 234]; une transformation de contact peut souvent, par suite, se décomposer en transformations de contact plus simples. Nous allons voir que c'est le cas pour les transformations dualistiques.

Prenons pour nouvelles variables :

$$X = \frac{A}{D}, \quad Y = \frac{B}{D}, \quad Z = \frac{C}{D};$$

alors

$$\Omega = Xx' + Yy' + Zz' + 1 = 0,$$

et la transformation est une transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Donc toute transformation dualistique se ramène à la transformation précédente suivie d'une transformation projective; et réciproquement.

Remarque. — On verrait, d'une manière analogue, que toute transformation dualistique peut aussi se ramener à la même transformation par polaires réciproques, *précédée* d'une transformation projective. Si donc on effectue successivement deux transformations dualistiques, le résultat final obtenu (ou *produit* de ces deux opérations) est une transformation projective.

Transformations dualistiques involutives. — Cherchons toutes les transformations dualistiques qui sont *symétriques*, ou *involutives*, c'est-à-dire telles que le plan homologue d'un point soit le même, qu'on considère le point comme appartenant à l'un ou à l'autre espace. Les équations :

$$\Omega(x, y, z; x', y', z') = 0, \qquad \Omega(x', y', z'; x, y, z) = 0,$$

doivent être équivalentes ; il existe donc un facteur constant k tel que :

$$\Omega(x, y, z; x', y', z') \equiv k\,\Omega(x', y', z'; x, y, z);$$

faisons $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$,

$$\Omega(x, y, z; x, y, z) \equiv k\,\Omega(x, y, z; x, y, z);$$

alors ou bien $\Omega(x, y, z; x, y, z) = 0$, ou bien $k = 1$.

Si $\Omega = 0$, le plan correspondant à un point passe par ce point. On a, quels que soient x, y, z,

$$x(ux + vy + wz + h) + y(u'x + v'y + w'z + h') + z(u''x + \ldots) + u'''x + \ldots \equiv 0\,;$$

ce qui revient à écrire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w & h \\ u' & v' & w' & h' \\ u'' & v'' & w'' & h'' \\ u''' & v''' & w''' & h''' \end{vmatrix}$$

est un déterminant symétrique gauche, donc de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & C & -B & P \\ -C & 0 & A & Q \\ B & -A & 0 & R \\ -P & -Q & -R & 0 \end{vmatrix}.$$

L'équation directrice s'écrit donc :

$$\Omega = x'(Cy - Bz + P) + y'(-Cx + Az + Q) + z'(Bx - Ay + R) - Px - Qy - Rz = 0.$$

ou :

$$A(yz' - zy') + B(zx' - xz') + C(xy' - yx') + P(x - x') + Q(y - y') + R(z - z') = 0.$$

C'est l'équation d'un complexe linéaire ; et lieu des points (x', y', z') associés au point (x, y, z) est le plan polaire du point (x, y, z) par rapport à ce complexe. Le plan polaire d'un point est la multiplicité transformée de ce point, et réciproquement. Par suite, la transformée d'une droite est sa conjuguée ; et une droite du complexe est à elle-même son homologue. Deux multiplicités homologues M_2 sont les deux multiplicités focales d'une congruence de droites du complexe, et réciproquement. Car une multiplicité M_2 peut toujours être considérée comme une multiplicité focale de la congruence des ∞^2 droites du complexe qui ont, en commun avec elle, au moins un élément de contact ; et ces droites étant à elles-mêmes leurs homologues, la multiplicité transformée de M_2 doit avoir elle-même au moins un élément de contact commun avec chacune de ces droites.

A une courbe correspond en général une développable ; à une courbe du complexe correspond la développable de ses tangentes.

Si nous prenons maintenant la solution $k = 1$, nous avons :

$$x'(ux + vy + wz + h) + \ldots = x(ux' + vy' + wz' + h) + \ldots$$

la forme Ω est symétrique en x, y, z ; x', y', z' et s'écrit :

$$\Omega = Axx' + Byy' + Czz' + M(yz' + zy') + N(zx' + xz') + \\ + P(xy' + yx') + Q(x + x') + R(y + y') + S(z + z') + T.$$

Les deux points (x, y, z) (x', y', z'), sont donc conjugués par rapport à la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Myz + 2Nzx + 2Pxy + \\ + 2Qx + 2Ry + 2Sz + T = 0.$$

Nous obtenons donc la transformation par polaires réciproques la plus générale.

La *transformation de Legendre* est donnée par la quadrique $x^2 + y^2 - 2z = 0$. L'équation directrice est $xx' + yy' - z - z' = 0$; et les équations de la transformation sont : $x' = p$, $y' = q$, $p' = x$, $q' = y$, $z' = px + qy - z$.

Remarque. — Pour avoir les équations d'une transformation de contact définie par une seule équation directrice $\Omega = 0$, on pourra écrire que l'équation

$$(2') \qquad dz' - p'dx' - q'dy' = 0$$

est conséquence des équations

$$(2) \qquad dz - pdx - qdy = 0,$$
$$(5) \qquad d\Omega = 0 ;$$

ce qui équivaut à poser une identité de la forme :

$$(6) \qquad dz' - p'dx' - q'dy' \equiv \lambda(dz - pdx - qdy) + \mu . d\Omega.$$

Soient en effet, $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_4 = 0$ cinq équations distinctes en x, y, z, p, q ; x', y', z', p', q', définissant la transformation. L'invariance de l'équation (2) s'exprime par une identité de la forme :

$$dz' - p'dx' - q'dy' \equiv \lambda(dz - pdx - qdy) + \\ + \mu\, d\Omega + \mu_1\, d\Omega_1 + \ldots + \mu_4\, d\Omega_4.$$

Et si $\mu_1, \ldots, \mu_4$ n'étaient pas nuls tous les quatre, on conclurait de là que $(\mu_1\, d\Omega_1 + \ldots + \mu_4\, d\Omega_4)$ ne contient que les différentielles dx, dy, dz ; dx', dy', dz', sans être identiquement nulle. Les équations de la transformation entraîneraient donc deux relations linéaires et homogènes en dx, dy, dz ; dx', dy', dz', à savoir :

$$d\Omega = 0, \; \mu_1\, d\Omega_1 + \ldots + \mu_4\, d\Omega_4 = 0.$$

Elles entraîneraient donc deux relations entre les variables x, y, z; x', y', z', ce qui est contraire à l'hypothèse.

On identifiera donc les deux membres de l'équation (6) ; ce qui donnera six équations ; si entre elles on élimine λ, μ, on aura quatre équations, qui, jointes à $\Omega = 0$, donneront x', y', z', p', q' en fonction de x, y, z, p, q, ou inversement.

Cas de deux équations directrices

4. — Passons au cas où on obtient deux relations :

$$(7) \qquad \Omega(x, y, z; x', y', x') = 0, \qquad \Theta(x, y, z; x', y', z') = 0,$$

en éliminant p, q ; p', q' entre les équations (1) de la transformation de contact considérée. A un point M (x, y, z) du premier espace correspond dans le deuxième espace une courbe (C') définie par ces équations (7) en x', y', z'. A une courbe lieu de ∞^1 points M correspond une surface engendrée par les ∞^1 courbes (C') homologues, à une surface (S) lieu de ∞^2 points correspond la congruence des courbes (C'), homologues de ces points ; une telle congruence a en général une surface focale, tangente à toutes ces courbes, et qui sera la transformée de la surface (S).

Pour avoir les équations d'une telle transformation, on écrira que la relation

$$dz' - p'dx' - q'dy' = 0$$

est conséquence des relations :

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad d\Omega = 0, \qquad d\Theta = 0;$$

ce qui donne une identité de la forme :

$$(8) \quad dz' - p'dx' - q'dy' \equiv \lambda(dz - pdx - qdy) + \mu d\Omega + \nu d\Theta.$$

On prouverait, comme ci-dessus, l'existence effective d'une telle identité. En identifiant, on a six équations ; si entre elles on élimine λ, μ, ν, on a trois équations qui, jointes à $\Omega = 0$, $\Theta = 0$, donnent les formules de la transformation.

Transformation de Sophus Lie, changeant les droites en sphères

Supposons, en particulier, les équations (7) bilinéaires. A un point M (x, y, z) correspond une droite (D'). Aux ∞^3 points M correspond un

complexe de droites (D′), soit (K′). De même à tous les points du deuxième espace correspond dans le premier espace un complexe (K). Etudions la nature de ces complexes. Considérons, à cet effet, une seule des équations (7) : elle définit une transformation dualistique, dans laquelle chaque point M a pour homologue un plan (P′) ; l'autre équation définit de même une transformation dualistique, qui fait correspondre au même point M un plan (Q′) ; et la droite (D′) est l'intersection des plans (P′), (Q′) qui correspondent ainsi au point M par ces deux transformations dualistiques. Or on a vu que le produit de deux transformations dualistiques est une transformation projective : donc le complexe (K′) est le complexe des droites suivant lesquelles se coupent les plans qui se correspondent dans une transformation projective. Un tel complexe s'appelle *complexe de Reye*, ou *complexe tétraédral.* Rappelons-en les propriétés, dans le cas général : les droites du complexe sont coupées par le tétraèdre formé par les quatre plans invariants de l'homographie en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Le rapport anharmonique des quatre plans menés par une droite du complexe et par les quatre sommets du même tétraèdre est constant (Von Staudt). Le complexe (K′) est du second degré, et la surface des singularités est constituée par les quatre faces du tétraèdre.

Cela posé, revenons à notre transformation de contact : à une courbe (C) correspond une surface réglée du complexe (K′). A une surface (S) correspond une congruence de droites appartenant au complexe (K′) : cette congruence admet deux multiplicités focales ; donc à un élément de contact du premier espace correspondent deux éléments de contact de l'autre.

Cherchons les équations des deux complexes (K) et (K′). Soient :

$$\Omega = Ax' + By' + Cz' + D, \qquad \Theta = Lx' + My' + Nz' + P,$$

A, B, ..., P étant des fonctions linéaires de x, y, z.

Soit $M'(x', y', z')$ un point du deuxième espace. Soit (D) la droite correspondante ; si (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) sont deux points de cette droite, on a :

$$\begin{aligned} &\Omega(x, y, z\,; x', y', z') = 0, &\qquad &\Theta(x, y, z\,; x', y', z') = 0, \\ &\Omega(x_0, y_0, z_0\,; x', y', z') = 0, &\qquad &\Theta(x_0, y_0, z_0\,; x', y', z') = 0. \end{aligned}$$

Eliminons x', y', z' entre ces quatre équations, nous obtenons, en désignant par A_0, B_0, ..., P_0 ce que deviennent les fonctions linéaires A, B, ..., P, quand on y remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0 :

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ L & M & N & P \\ L_0 & M_0 & N_0 & P_0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du complexe. En développant par la règle de Laplace, on trouvera une équation du second degré par rapport aux coordonnées de la droite, définies au moyen des deux points (x, y, z), (x_0, y_0, z_0). Le complexe (K), et de même le complexe (K'), est donc bien, en général, du second degré.

A une courbe (C) correspond une surface réglée engendrée par la droite (D'). Cherchons si cette surface réglée peut être développable. Les droites (D') ont pour équations :

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0, \qquad Lx' + My' + Nz' + P = 0;$$

x, y, z, et par suite A, B, C, D, étant fonctions d'un paramètre u. Exprimons que cette droite rencontre la droite infiniment voisine : nous adjoignons à ses équations les équations :

$$x'dA + y'dB + z'dC + dD = 0, \qquad x'dL + y'dM + z'dN + dP = 0;$$

d'où la condition, qui définira la courbe (C) :

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ L & M & N & P \\ dA & dB & dC & dD \\ dL & dM & dN & dP \end{vmatrix} = 0.$$

Mais l'équation du complexe (K) peut s'écrire, en posant :

$$A_0 - A = \Delta A, \quad B_0 - B = \Delta B, \ \ldots, \quad P_0 - P = \Delta P,$$

sous la forme :

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ L & M & N & P \\ \Delta A & \Delta B & \Delta C & \Delta D \\ \Delta L & \Delta M & \Delta N & \Delta P \end{vmatrix} = 0.$$

Or A, B, ... P étant des fonctions linéaires, les accroissements ΔA, ..., ΔP sont formés avec :

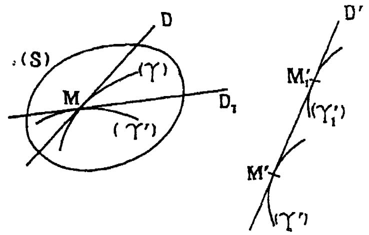
$$\Delta x = x_0 - x, \quad \Delta y = y_0 - y, \quad \Delta z = z_0 - z,$$

comme les différentielles dA, ..., dP sont formées avec dx, dy, dz. L'équation de la courbe (C) se déduit donc de l'équation du complexe,

en y remplaçant $x_0 - x$, $y_0 - y$, $z_0 - z$ par dx, dy, dz ; elle est donc telle que sa tangente appartient au complexe (K).

Aux courbes du premier complexe correspondent donc des développables dont les génératrices sont des droites du second complexe, et dont, par suite, les arêtes de rebroussement sont des courbes du second complexe A chaque point M d'une courbe (C) du premier complexe correspond une génératrice (T') d'une développable : soit M' son point de contact avec l'arête de rebroussement. Si on considère l'élément linéaire formé d'un point M, et de la droite (T) du premier complexe passant par ce point et tangente à (C), il lui correspondra l'élément linéaire, déterminé, du second complexe, formé de M' et de (T'). Les courbes des deux complexes se correspondent ainsi par points et par tangentes.

Soit une surface (S), et supposons que le complexe (K) soit effectivement du second degré. Considérons un point M de la surface et le plan tangent (P). Le cône du complexe (K), de sommet M, est coupé par le plan (P) suivant deux droites (D), (D_1) qui appartiennent au complexe (K). Par chaque point de (S) passent ainsi deux droites du complexe (K) tangentes à la surface. Par tout point de la surface (S) passent donc deux courbes (γ), (γ_1) du complexe (K) situées sur cette surface. Au point M correspond une droite (D') du complexe (K'). A la droite (D) du complexe (K) correspond un point M' de (D') ; et de même à la droite (D_1) correspond un point M_1' de (D').



Aux courbes (γ), (γ') du complexe (K) correspondent deux courbes (γ), (γ'_1) du complexe (K') tangentes en M', M'_1 à la droite (D'). Si le point M décrit la courbe (γ), les droites (D') correspondantes ont pour enveloppe la courbe (γ'), et si M décrit (γ_1), (D') enveloppe (γ'_1).

Si on considère la congruence des droites (D') correspondant aux points M de la surface (S), les courbes (γ') sont les arêtes de rebroussement d'une des familles de développables de cette congruence ; et les courbes (γ'_1) sont les arêtes de rebroussement de l'autre famille. Les courbes (γ') engendrent une des nappes de la surface focale, les courbes (γ'_1) engendrent l'autre nappe. Le plan tangent en M' à la multiplicité focale est le plan osculateur à (γ'_1), et par suite le plan tangent au cône du complexe (K') de sommet M'_1.

Un élément de contact correspondant à l'élément (M, P) est formé du point M' et du plan tangent au cône du complexe (K') qui a pour

sommet M'_1. L'autre élément correspondant à (M, P) est formé du point M'_1 et du plan tangent au cône du complexe (K') qui a pour sommet M'_1.

Si la surface (S) est une surface du complexe (K), tangente en chacun de ses points au cône du complexe, les droites (D), (D_1) sont confondues ; alors les deux éléments de contact correspondant à l'élément (M, P) sont confondus, et la surface (S') définie par ces éléments est une surface du complexe (K').

Remarques. — Les seuls cas possibles sont les suivants :

1° Les complexes (K), (K') sont effectivement du second degré. On démontre alors, comme nous l'avons dit précédemment, qu'ils sont tous deux tétraédraux.

2° Un seul des complexes est linéaire. On démontre que l'autre est constitué par les droites qui rencontrent une conique. Ce cas va nous donner la *transformation de Sophus Lie*, qui change les droites en sphères.

3° Les deux complexes sont linéaires. On démontre qu'ils sont tous deux spéciaux. Ce cas donne, en particulier, la *transformation d'Ampère*, définie par les équations directrices :

$$xx' + z + z' = 0, \qquad y' + y = 0,$$

et dont les équations sont :

$$x' = p, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z - px, \qquad p' = x, \qquad q' = -q.$$

Transformation des droites en sphères. — Supposons en particulier :

$$\Omega = x - iy + x'z - z' = 0, \qquad \Theta = x'(x + iy) - z - y' = 0.$$

L'équation du premier complexe est :

$$\begin{vmatrix} z - z_0 & 0 & 0 & x - iy - (x_0 - iy_0) \\ z_0 & 0 & -1 & x_0 - iy_0 \\ x + iy & -1 & 0 & -z \\ x_0 + iy_0 - (x + iy) & 0 & 0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

ce qui devient :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0,$$

c'est-à-dire :

(K) $$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Le complexe (K) est le complexe des droites minima.

Cherchons le deuxième complexe. Il suffit de considérer deux points (x', y', z'), (x'_0, y'_0, z'_0) correspondant au même point (x, y, z) : cela donne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x' - x'_0 & -z' + z'_0 \\ 1 & -i & x'_0 & -z'_0 \\ x' - x'_0 & i(x' - x'_0) & 0 & -y' + y'_0 \\ x'_0 & ix'_0 & -1 & -y'_0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

ce qui devient :

$$(x' - x'_0)(x'y'_0 - y'x'_0) + (z' - z'_0)(x' - x'_0) = 0,$$

c'est-à-dire, avec les notations classiques pour les coordonnées pluckériennes :

$$a(r - c) = 0.$$

La solution $a = 0$ est singulière, et on obtient pour le complexe (K') :

$$(K') \qquad r - c = 0.$$

Nous avons ainsi une *correspondance entre un complexe spécial du second degré et un complexe linéaire*. Les cônes du complexe (K) sont les cônes isotropes. A chaque élément de contact du premier espace correspondent deux éléments de contact du second espace conjugués par rapport au complexe (K') ; car, d'une façon générale, les points M', M'_1, sont sur une droite (D') de (K'), et le plan associé à M' est ici le plan polaire de M'_1 et inversement.

Partons d'une sphère : prenons deux génératrices d'un système ; ce sont des droites minima (D), (D_1). Le second système de génératrices est entièrement défini, car chacune d'elles doit rencontrer (D), (D_1) et le cercle imaginaire à l'infini. Aux deux droites (D), (D_1) correspondent deux points M', M'_1. Considérons une génératrice isotrope (Δ) rencontrant (D), (D_1) : il lui correspond un point μ' ; (Δ) rencontrant la droite (D), la droite $M'\mu'$ est une droite du complexe linéaire, et de même $M'_1\mu'$; donc μ' est le pôle d'un plan passant par M'_1 M'_1. Lorsque (Δ) décrit la sphère, le plan μ'_1 M'_1 M'_1 tourne autour de M'_1 M'_1, et le lieu de μ' est la droite conjuguée de M'_1 M'_1. A la sphère correspond donc une droite. En partant du second système de génératrices, on obtiendra de même une droite ; (D) et (D_1) donneront les points M', M'_1, ; cette droite sera donc la droite $M'M'_1$, conjuguée de la précédente. Donc : *à une sphère correspondent deux droites, conjuguées par rapport au complexe linéaire* (K').

Ceci peut se voir par le calcul. Prenons la droite (Δ'), de coordonnées pluckériennes a_0, b_0, c_0, p_0, q_0, r_0 :

$$(\Delta') \qquad c_0x' = a_0z' - q_0, \qquad c_0y' = b_0z' + p_0\,;$$

la surface réglée correspondante est engendrée par les droites :

$$c_0(x - iy) + z(a_0z' - q_0) - c_0z' = \text{o},$$
$$(a_0z' - q_0)(x + iy) - c_0z - b_0z' - p_0 = \text{o},$$

obtenues en portant dans $\Omega = \text{o}$, $\Theta = \text{o}$, les valeurs x' et y' tirées des équations (Δ'). Ordonnons en z' ; il vient :

$$c_0(x - iy) - q_0z + z'(a_0z - c_0) = \text{o},$$
$$[q_0(x + iy) + c_0z + p_0] - z'[a_0(x + iy) - b_0] = \text{o}.$$

En éliminant z' on obtient la surface cherchée :

$$[c_0(x - iy) - q_0z][a_0(x + iy) - b_0] +$$
$$+ (a_0z - c_0)[q_0(x + iy) + c_0z + p_0] = \text{o},$$

ou, en tenant compte de $a_0p_0 + b_0q_0 + r_0c_0 = \text{o}$,

(Σ) $a_0(x^2 + y^2 + z^2) - b_0(x - iy) - q_0(x + iy) - (c_0 + r_0)z - p_0 = \text{o}$.

C'est l'équation d'une sphère; et il est facile de voir que ce peut être une sphère quelconque, en choisissant (Δ') convenablement.

Cherchons la conjuguée (Δ'_1) de (Δ') par rapport à (K'). Soient a'_0, b'_0, c'_0, p'_0, q'_0, r'_0 ses coordonnées. Nous avons à exprimer que le complexe (K') et les complexes spéciaux (Δ'), (Δ'_1) appartiennent à un même faisceau. Ce qui donne, λ, λ' et μ étant des inconnues auxiliaires :

$$\lambda a_0 + \lambda a'_0 = \text{o}, \quad \lambda b_0 + \lambda' b'_0 = \text{o}, \quad \lambda p_0 + \lambda' p'_0 = \text{o},$$
$$\lambda q_0 + \lambda' q'_0 = \text{o}, \quad \lambda c_0 + \lambda' c'_0 + \mu = \text{o}, \quad \lambda r_0 + \lambda' r'_0 - \mu = \text{o}\,;$$

Comme les coordonnées ne sont définies qu'à un facteur près, on peut remplacer a_0, b_0, ... par λa_0, λb_0, ... ; et a'_0, b'_0, ... par $-\lambda' a_0$, $-\lambda' b_0$, ... Cela revient à faire $\lambda = \text{1}$, $\lambda' = -\text{1}$; et donne les équations simplifiées :

$$a'_0 = a_0, \quad b'_0 = b_0, \quad p'_0 = p_0, \quad q'_0 = q_0, \quad c'_0 = c_0 + \mu, \quad r'_0 = r_0 - \mu.$$

La condition

$$a'_0p'_0 + b'_0q'_0 + c'_0r'_0 = \text{o}$$

donne ensuite :

$$\mu[\mu + c_0 - r_0] = \text{o}\,;$$

et, en écartant la solution banale $\mu = 0$, il reste :

$$\mu + c_0 - r_0 = 0.$$

On trouve donc $c'_0 = r_0$ et $r'_0 = c_0$, et l'on voit que l'on retrouvera la même sphère (Σ) en partant de (B'_1) au lieu de partir de (B').

Equations de la transformation. — Les formules de la transformation s'obtiennent par la méthode générale. On trouve :

$$\left\{\begin{aligned}
x &= \frac{z'}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x'(px' + qy') - y' - p'}{x' - q'} \\
y &= \frac{iz'}{2} + \frac{i}{2}\,\frac{x'(px' + qy') + y' + p'}{x' - q'} \\
z &= \frac{p'x' + q'y'}{x' - q'} \\
p &= -\frac{q'x' - 1}{q' + x'} \\
q &= i\,\frac{q'x' + 1}{q' + x'}\,.
\end{aligned}\right.$$

Cette transformation de Sophus Lie, changeant des droites qui se rencontrent en sphères tangentes, c'est-à-dire des droites qui ont un élément de contact commun en sphères ayant un élément de contact commun, réalise la correspondance signalée dans les chapitres précédents entre les droites et les sphères.

Par exemple, elle transforme une surface réglée en surface canal ; une quadrique en cyclide de Dupin ; une surface développable en surface canal isotrope ; une bande asymptotique d'une surface en une bande de courbure de la transformée ; de sorte qu'on peut dire qu'*elle transforme les lignes asymptotiques en lignes de courbure.*

On vérifiera facilement qu'elle transforme un complexe linéaire de droites en une famille de ∞^2 sphères coupant une sphère fixe sous un angle constant ; et que cet angle constant est droit, lorsque le complexe linéaire est en involution avec le complexe (K').

La transformation de Lie en coordonnées pentasphériques. — Les derniers résultats deviennent immédiats, si on remarque que la sphère (Σ), qui est l'homologue de la droite (Δ') (de coordonnées pluckériennes $a_0, b_0, c_0, p_0, q_0, r_0$), a, d'après l'équation trouvée plus haut, pour coordonnées pentasphériques homogènes [Ch. VIII, § 6, p. 226],

$$c_1 = a_0 + p_0, \quad c_2 = -i(a_0 - p_0), \quad c_3 = b_0 + q_0,$$
$$c_4 = -i(b_0 - q_0), \quad c_5 = c_0 + r_0, \quad c_6 = -i(c_0 - r_0).$$

Or ce sont précisément, d'après les formules du ch. X, n° 5, p. 280, les *coordonnées symétriques* $t_1, t_2, \ldots, t_6$ de la droite (Δ').

Ainsi *la transformation de Lie se traduit par l'interprétation, comme coordonnées pentasphériques de sphères, des coordonnées symétriques de droites.* Absolument comme la transformation par dualité se traduit par l'interprétation des coordonnées de points en coordonnées de droites.

L'équation $\sum_{k=1}^{6} C_k t_k = 0$ d'un complexe linéaire devient ainsi, en particulier, l'équation $\sum_{k=1}^{6} C_k c_k = 0$, qui exprime [Ch. VIII, § 6, p. 226] qu'une sphère coupe une sphère fixe sous un angle constant : cet angle est droit, si C_6 est nul. Or l'équation du complexe (K') est, en coordonnées symétriques, $t_6 = 0$; de sorte que la condition $C_6 = 0$ exprime bien [Ch. X, n° 6] que ce complexe est en involution avec le complexe $\Sigma C_k t_k = 0$.

Transformation des lignes asymptotiques

5. — Proposons-nous de trouver toutes les transformations de contact qui changent les lignes asymptotiques d'une surface quelconque en lignes asymptotiques de la transformée de cette surface, c'est-à-dire qui changent toute bande asymptotique en une bande asymptotique. Remarquons à cet effet qu'une telle transformation changera toute multiplicité M_2, sur laquelle les bandes asymptotiques ne dépendent pas seulement de constantes arbitraires, mais dépendent de fonctions arbitraires, en une multiplicité M_2 de même nature. Or les bandes asymptotiques (ou de rebroussement) étant définies par les équations

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad dpdx + dqdy = 0,$$

on devra considérer aussi comme formant une bande asymptotique, dans la question actuelle, ∞^1 éléments de contact ayant le même point, c'est-à-dire un cône élémentaire ; car les coordonnées de ces éléments satisfont aux équations précédentes, puisqu'elles sont telles que $dx = dy = dz = 0$.

Et, dès lors, les M_2 particulières en question sont les plans, les droites et les points. Les transformations cherchées échangent donc entre elles les figures qui sont des droites, des points ou des plans. De là plusieurs cas à examiner :

1° Si la transformation est ponctuelle, elle échange les points en points, les plans en plans, et les droites en droites. C'est par suite une *transformation projective* (ou *homographique*).

2° Si la transformation est une transformation de contact de la pre-

mière espèce, c'est-à-dire fait correspondre à chaque point du premier espace (E) une surface du second espace (E'), elle change les points de (E) en plans de (E'); et comme elle fait alors correspondre aussi à chaque point de (E') une surface de (E), elle change les points de (E') en plans de (E); donc elle change les points en plans, les plans en points, et les droites en droites. Si donc on la compose avec une transformation par polaires réciproques, on obtient une transformation homographique; et, par suite, elle s'obtient en composant une transformation homographique avec une transformation par polaires réciproques. C'est donc une *transformation dualistique*.

3° Si la transformation est une transformation de contact de la deuxième espèce, c'est-à-dire si à tout point de l'un des espaces correspond dans l'autre une courbe, à tout point de l'un des espaces correspondra dans l'autre une droite. Or prenons dans l'espace (E) quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 non situés dans un même plan, et soient (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) les droites qui leur correspondent dans l'espace (E'). Il existe au moins une droite (Δ) ayant avec chacune des quatre droites, (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) un élément de contact commun; et à (Δ) devrait correspondre dans (E) un point, un plan ou une droite ayant un élément de contact commun avec chacun des quatre points P_1, P_2, P_3, P_4. Or il n'en existe pas. Donc *ce troisième cas est impossible.*

Les seules transformations pouvant répondre à la question sont donc homographiques ou dualistiques. Mais toute transformation de contact changeant les droites en droites répond à la question, car elle changera la famille des génératrices d'une développable, dont chacune a un élément de contact commun avec la génératrice infiniment voisine, en celle des génératrices d'une autre développable; et, par suite, la bande de rebroussement de la première développable en la bande de rebroussement de la seconde.

On en déduit que :

1° *Les transformations homographiques et les transformations dualistiques changent les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques; et ce sont les seules transformations de contact possédant cette propriété.*

2° *Ces transformations sont aussi les seules transformations de contact changeant toute droite en une droite.*

Remarque. — Les transformations ainsi obtenues forment deux familles distinctes (transformations projectives, et transformations dualistiques) de ∞^{15} transformations; mais le produit de deux transformations dualistiques est une transformation projective, comme on l'a vu plus haut et l'ensemble de toutes les transformations obtenues forme un groupe, comme il était évident *a priori*.

Transformations des lignes de courbure

6. — La transformation de contact des droites en sphères, de Lie, permet de déduire immédiatement des résultats précédents toutes les transformations de contact qui changent les lignes de courbure d'une surface quelconque en les lignes de courbure de sa transformée.

On voit de plus que ce sont aussi celles qui changent toute sphère en une sphère. On peut donc dire qu'elles constituent le *groupe des sphères*. Il y en a, d'après ce qui précède, deux familles, de ∞^{15} transformations chacune.

On aurait pu, pour obtenir le résultat précédent, refaire un raisonnement direct analogue à celui du paragraphe 5, en partant des multiplicités M_2 pour lesquelles les bandes de courbure dépendent de fonctions arbitraires.

Cherchons, plus spécialement, celles des transformations considérées qui sont des transformations ponctuelles. Dans la transformation de Lie, les points de l'espace (E) correspondent aux droites d'un complexe linéaire (K'). Les transformations cherchées proviennent donc des transformations projectives ou dualistiques qui laissent invariant ce complexe. On les obtient en composant avec la transformation par polaires réciproques définie par ce complexe (K') l'une quelconque des transformations projectives qui laissent le complexe invariant.

Ainsi se trouve établie une correspondance entre le *groupe projectif d'un complexe linéaire* et le groupe des transformations ponctuelles qui changent toute sphère en sphère. Ce dernier est, comme on l'a vu au Ch. VIII, § 8, le *groupe conforme* ; on sait que ses transformations s'obtiennent en combinant des inversions, des homothéties et des déplacements.

Cette correspondance se retrouverait, du reste, sans peine, par l'emploi, indiqué ci-dessus, des coordonnées symétriques de droites, et des coordonnées pentasphériques homogènes de sphères.

Parmi les transformations de contact qui changent les lignes de courbure en lignes de courbure figurent les *dilatations*, dans lesquelles chaque élément de contact subit une translation perpendiculaire à son plan et d'amplitude donnée, c'est-à-dire dans lesquelles chaque surface est remplacée par une surface parallèle. Elles sont définies par l'équation directrice $(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=h^2$, où h est une constante arbitraire.

Une autre classe de transformations de contact changeant toute sphère en sphère est définie par les équations directrices de la forme

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+z'^2-2mz'z+z^2=0,$$

où m est une constante arbitraire. Chaque point (x, y, z) a pour homologue une sphère qui coupe le plan des xy sous un angle V constant ($\cotg V = mi$) : le cercle d'intersection étant celui suivant lequel le cône isotrope de sommet (x, y, z) coupe ce même plan.

Ces transformations sont dites *transformations par semi-plans réciproques* (Ribaucour, Laguerre, Darboux), parce qu'elles changent un plan en un couple de plans, passant par la droite d'intersection du premier avec le plan des xy ; et parce qu'elles sont involutives, l'équation qui les définit étant symétrique par rapport aux deux systèmes de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z').

Parmi les transformations considérées figurent aussi les transformations de Ribaucour qui seront définies au chapitre XIII.

Remarque. — On démontre que les deux familles de ∞^{15} transformations du groupe des sphères sont définies, quand on définit une sphère par ses six coordonnées homogènes pentasphériques, par les transformations linéaires et homogènes orthogonales portant sur ces six variables. Les deux familles se distinguent par la valeur ($+ 1$ ou $- 1$) du déterminant de cette substitution.

Transformations apsidales

7. — Signalons enfin une classe importante de transformations de contact, définies par deux équations directrices. Chacune correspond à un point de l'espace, ou pôle de la transformation. Si on prend le pôle pour origine des coordonnées, les équations directrices de la transformation sont :

$$(1) \qquad \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \\ xx' + yy' + zz' = 0. \end{cases}$$

Cette transformation dite *apsidale*, est donc involutive, et transforme chaque point M en un cercle : c'est le cercle de rayon OM, qui a O pour centre et la droite OM pour axe.

On peut, par suite, obtenir la transformée d'une surface (S), en la coupant par les divers plans (Π) passant en O, et en portant sur la normale en O à chacun de ces plans, des longueurs OM égales aux rayons des cercles de centre O, situés dans le plan considéré, et tangents à la surface (S). Ces rayons sont, du reste, les longueurs des normales menées de O à la section de (S) par le plan (Π).

La surface apsidale d'une sphère est un tore. — Soit, en effet, C le centre de la sphère (S), et (Π_0) un plan passant par OC ; soit (γ) le cercle de section de la sphère (S) par ce plan. Tout plan (Π) perpendiculaire

à (Π_0), mené par O, coupe (γ) suivant une corde AB, et OA, OB sont les normales menées de O à la section de la sphère par (Π). La perpendiculaire menée par O à (Π) est, de plus, située dans (Π_0) ; on obtient donc les points P situés dans le plan (Π) en faisant tourner la corde AB dans le plan (Π_0) d'un angle droit autour de O, dans un sens ou dans l'autre. Cette opération, répétée sur toutes les cordes de (γ) qui passent en O, donne deux cercles (γ_1) et (γ_2), symétriques par rapport à OC, obtenus en faisant subir à (γ) les deux mêmes rotations. Ces cercles constituent la méridienne de la transformée de (S) qui doit être, comme (S), de révolution autour de OC. Le théorème est donc démontré.

Surface des ondes. — Par définition, la surface des ondes est la transformée apsidale d'un ellipsoïde par rapport à son centre : on l'obtiendra donc, d'après ce qui précède, en portant sur chaque diamètre de l'ellipsoïde, à partir du centre, et de part et d'autre, des longueurs égales aux demi-axes de la section centrale perpendiculaire à ce diamètre.

Nous la calculerons directement, en complétant les équations de la transformation. Nous devons écrire à cet effet, d'après la théorie générale des transformations de contact, l'identité :

$$\begin{aligned} dz' - p'dx' - q'dy' - \lambda\,(dz - pdx - qdy) = \\ \rho\,(xdx + ydy + zdz - x'dx' - y'dy' - z'dz') \\ + \sigma\,(xdx' + ydy' + zdz' + x'dx + y'dy + z'dz), \end{aligned}$$

qui donne, par identification :

$$\begin{aligned} &1 = -\rho z' + \sigma z, &\quad -p' &= -\rho x' + \sigma x, &\quad -q' &= -\rho y' + \sigma y\,; \\ &-\lambda = \rho z + \sigma z', & \lambda p &= \rho x + \sigma x', & \lambda q &= \rho y + \sigma y'. \end{aligned}$$

On en conclut, en éliminant, λ, ρ et σ :

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} p\,(yz' - zy') + q\,(zx' - xz') &= (xy' - yx'), \\ p'\,(yz' - zy') + q'\,(zx' - xz') &= (xy' - yx'), \\ pp' + qq' + 1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

L'interprétation est immédiate. Soit M le point, et (P) le plan de l'élément de contact (x, y, z, p, q) ; M', (P') le point, et le plan, de l'élément (x', y', z', p', q'). Le rayon OM', déjà perpendiculaire et égal à OM, est dans le plan normal à (P) mené par OM. La normale à (P') en M' est dans ce même plan MOM', et elle est perpendiculaire à la normale à (P).

On a ainsi la définition complète de la transformation des éléments de contact.

Cela posé, si on part de l'ellipsoïde

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

la première des équations (2), s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=0,$$

et équivaut à des relations de la forme :

(4) $$\mu' x'=x\left(\frac{1}{a^2}-\mu\right),\quad \mu' y'=y\left(\frac{1}{b^2}-\mu\right),\quad \mu' z'=z\left(\frac{1}{c^2}-\mu\right).$$

La seconde des équations (1), donne alors, en tenant compte de la première et de (3),

$$0=1-\mu(x^2+y^2+z^2),\qquad \text{ou } \mu=\frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Il ne reste plus qu'à porter les valeurs de x, y, z, tirées des équations (4), dans la combinaison homogène de la première équation (1) et de (3) :

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\mu\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\mu\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\mu\right)=0.$$

On obtient, en supprimant les accents,

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}-\mu}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}-\mu}+\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}-\mu}=0,\qquad \mu=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

ou, après réductions,

$$\Sigma a^2x^2.\,\Sigma x^2-\Sigma(b^2+c^2)a^2x^2+a^2b^2c^2=0.$$

CHAPITRE XII

SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX

Théorème de Dupin

1. — L'emploi des coordonnées rectangulaires revient à définir chaque point comme l'intersection de trois plans, respectivement parallèles aux trois faces du trièdre de coordonnées, et, par conséquent, orthogonaux deux à deux. Il est donc fondé sur la considération de ce *système triple orthogonal*, formé de trois familles de plans, tels que chaque plan d'une des familles soit orthogonal à tout plan de l'une des deux autres familles.

On peut généraliser et employer comme *surfaces coordonnées* un système triple quelconque, formé de trois familles de surfaces :

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) = u, \qquad \psi(x, y, z) = v, \qquad \chi(x, y, z) = w.$$

Chaque point P (x, y, z) trouvera ainsi défini par les paramètres u, v, w des trois surfaces coordonnées qui se coupent en ce point ; et ces valeurs de u, v, w seront ses *coordonnées curvilignes* dans le système de coordonnées ainsi défini.

Ces formules (1) transforment les coordonnées x, y, z en coordonnées u, v, w. Si nous résolvons les équations précédentes en x, y, z, ce que nous supposons possible, nous aurons des formules équivalentes :

$$(2) \qquad x = f(u, v, w), \qquad y = g(u, v, w), \qquad z = h(u, v, w).$$

On emploie en général un *système triple orthogonal*. Cherchons donc à exprimer que les équations (1) ou (2) définissent un système triple orthogonal. Les intersections des surfaces deux à deux doivent être orthogonales. Les surfaces des trois familles s'obtiendront en faisant dans (2) successivement $u = c^{te}$, $v = c^{te}$, $w = c^{te}$.

Les intersections des surfaces deux à deux sont respectivement :

$$(v = c^{te}, w = c^{te}), (w = c^{te}, u = c^{te}), (u = c^{te}, v = c^{te}),$$

et les directions des tangentes sont respectivement :

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}; \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}; \quad \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial w}, \frac{\partial h}{\partial w}.$$

Les conditions d'orthogonalité sont donc :

$$(3) \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial w} = 0, \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Interprétons ces conditions. Prenons la surface $w = c^{te}$. La troisième condition exprime que sur cette surface les lignes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ sont orthogonales, et les deux premières expriment que $\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial w}. \frac{\partial h}{\partial w}$ est une direction perpendiculaire aux tangentes à ces deux courbes, et par suite, que c'est la direction de la normale ; soient l, m, n les trois coefficients de direction de cette normale. Différentions la troisième relation par rapport à w : nous obtenons :

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} = 0 ;$$

ou :

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} = 0.$$

Or :

$$\Sigma\, l\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\, l\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

d'où :

$$\Sigma\, l\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\Sigma \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \Sigma\, l\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\Sigma \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v};$$

la condition précédente s'écrit donc :

$$\Sigma\, l\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0,$$

ce qui exprime (ch. II, § 3, p. 27) que les lignes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$, c'est-à-dire les intersections de la surface $w = c^{te}$ avec les surfaces $u = c^{te}$ et $v = c^{te}$ sont conjuguées sur cette surface. Comme ces courbes sont déjà orthogonales par hypothèse, ce sont des lignes de courbure. D'où le *Théorème de Dupin : sur chaque surface d'un système triple orthogonal, les intersections avec les autres surfaces de ce système sont des lignes de courbure.*

Equation aux dérivées partielles de Darboux

2\. — Proposons-nous de rechercher les systèmes triples orthogonaux. Prenons une famille de surfaces :

$$\varphi(x, y, z) = u \tag{1}$$

et cherchons à déterminer deux autres familles constituant avec celle-ci un système triple orthogonal. Prenons dans l'espace un point M ; par ce point M passe une surface u ; prenons les tangentes MT, MT′ en M à ses lignes de courbure. Ces droites sont parfaitement déterminées ; si $p, q, -1$ sont les coefficients de direction de MT, ce sont des fonctions connues de x, y, z. De même pour MT′. Il faudra alors qu'en chaque point M, une surface d'une autre famille, par exemple :

$$\psi(x, y, z) = v, \tag{2}$$

soit normale à MT ; il faudra donc que p, q soient les dérivées partielles de z par rapport à x, y (z étant défini par l'équation précédente), donc que ψ soit solution du système :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + p\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Ces équations ne sont pas compatibles en général : pour qu'elles le soient, il faut et il suffit, d'après la théorie des *systèmes complets* d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles, que p et q satisfassent à la condition :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} \tag{4}$$

obtenue en éliminant ψ, par différentiation, entre les deux équations précédentes. C'est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, puisque p, q s'expriment en fonction des dérivées premières et secondes de φ par rapport à x, y, z. Ainsi donc *une famille de surfaces données ne peut en général faire partie d'un système triple orthogonal.* Si la condition (4) est réalisée, la solution générale des équations (3) est une fonction arbitraire d'une fonction déterminée de x, y, z ; et nous avons une deuxième famille de surfaces entièrement déterminée, dont chacune coupe à angle droit chacune des surfaces (S) de la famille $\varphi(x, y, z) =$ const. suivant une ligne de courbure de cette surface (S). Alors, d'après le théorème de Joachimsthal, l'intersection de chaque surface (S_1) de cette seconde famille avec chaque surface (S) de la première est aussi ligne de courbure sur (S_1).

En résumé nous avons deux familles de surfaces :

$$(S) \qquad \varphi(x, y, z) = \text{const.}$$
$$(S_1) \qquad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

qui se coupent orthogonalement suivant des courbes, dont chacune est ligne de courbure à la fois pour les deux surfaces correspondantes. Il reste à étudier si l'on peut déterminer une troisième famille de surfaces

$$(S_2) \qquad \chi(x, y, z) = \text{const.}$$

qui constitue avec les deux premières un système triple orthogonal, c'est-à-dire à étudier le système d'équations linéaires aux dérivées partielles dont dépend la fonction inconnue χ :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial\chi}{\partial z} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial\chi}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Introduisons, pour abréger, les opérateurs différentiels :

$$Af = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$Bf = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.$$

D'après la théorie des systèmes complets d'équations linéaires, la condition nécessaire et suffisante pour que le système (5) soit intégrable est que l'équation :

$$\left(A\frac{\partial\psi}{\partial x} - B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x} + \left(A\frac{\partial\psi}{\partial y} - B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y} + \left(A\frac{\partial\psi}{\partial z} - B\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0,$$

soit une conséquence algébrique des équations (5), c'est-à-dire que φ et ψ satisfassent à la condition :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} A\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - B\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\[2mm] A\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - B\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\[2mm] A\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - B\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition se simplifie. Remarquons en effet que :

$$\begin{aligned}A\frac{\partial\psi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}\\&\quad+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\},\end{aligned}$$

d'où, à cause de l'orthogonalité des surfaces (S) et (S_1), l'identité,

$$A\frac{\partial\psi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

et, de même, les identités analogues :

$$A\frac{\partial\psi}{\partial y}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\qquad A\frac{\partial\psi}{\partial z}+B\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Par suite, la condition (6) devient :

$$\begin{vmatrix}A\frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x}\\ A\frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y}\\ A\frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

Or, pour une valeur quelconque de x, y, z, les dérivées $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ sont les coefficients de direction l, m, n de la normale à celle des surfaces (S_1) qui passe par le point de coordonnées x, y, z ; et $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ sont les coefficients de direction de la normale à celle des surfaces (S) qui passe par ce même point, c'est-à-dire de la tangente à une ligne de courbure de (S_1) ; en désignant par dx, dy, dz un déplacement effectué suivant la direction de cette tangente, on aura :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\lambda.\,dx,\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\lambda.\,dy,\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\lambda.\,dz\,;$$

et, par suite,

$$A\frac{\partial\psi}{\partial x}=Al=\lambda\left(\frac{\partial l}{\partial x}dx+\frac{\partial l}{\partial y}dy+\frac{\partial l}{\partial z}dz\right)=\lambda dl\,;$$

et, de même,

$$A\frac{\partial\psi}{\partial y}=\lambda.\,dm,\qquad A\frac{\partial\psi}{\partial z}=\lambda.\,dn.$$

La condition (7) deviendra donc :

$$\begin{vmatrix} dl & dx & l \\ dm & dy & m \\ dn & dz & n \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est satisfaite, puisque le déplacement dx, dy, dz a lieu suivant une ligne de courbure.

La condition d'intégrabilité du système (5) est donc remplie, et la troisième famille (S_2) existe toujours et est entièrement déterminée. D'où les résultats suivants :

1° *Il existe une équation aux dérivées partielles du troisième ordre* (l'équation (4)) *qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* φ (x, y, z) *fournisse une famille de surfaces* (S) *faisant partie d'un système triple orthogonal. Si la famille* (S) *est donnée, les deux autres familles* (S_1) *et* (S_2) *sont entièrement déterminées.*

2° *Pour que deux familles de surfaces,* (S) *et* (S_1), *fassent partie d'un système triple orthogonal, il faut et il suffit qu'elles se coupent à angle droit, et que les intersections soient lignes de courbure sur les surfaces* (S), *ou sur les surfaces* (S_1).

On remarquera enfin, que si l'on connaît les lignes de courbure (C_1) des surfaces (S_1) par exemple, qui ne sont pas les intersections des surfaces (S_1) et des surfaces (S), et les lignes de courbure (C) d'une seule surface (S), chaque surface (S_2) sera engendrée par les courbes (C_1) qui s'appuient sur une même courbe (C).

Systèmes triples orthogonaux contenant une surface

3. — On reconnaît facilement qu'une surface quelconque donnée peut faire partie d'un système triple orthogonal. Traçons, en effet, sur cette surface (S) les lignes de courbure, et menons les normales à la surface en tous les points de ces lignes : elles engendrent deux familles de développables orthogonales à la surface donnée. En adjoignant à la surface (S) les surfaces parallèles, on a un système triple orthogonal.

Remarque I. — Les surfaces parallèles à une surface (S) en dérivent par la transformation de contact définie par l'équation :

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 - r^2 = 0$$

où r est une constante arbitraire ; en effet la surface parallèle est l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon constant ayant leurs centres

sur la surface (S). Cette transformation de contact s'appelle, comme nous l'avons vu, *dilatation* [Cf. Ch. XI, § 6].

Remarque II. — Lorsqu'on sait qu'une famille de surfaces (S) appartient à un système triple orthogonal, la détermination des deux autres familles de ce système triple peut se faire ainsi : on détermine sur une de ces surfaces (S) les lignes de courbure ; et on cherche, d'autre part, les courbes (T), trajectoires orthogonales des surfaces (S). Les autres familles du système sont engendrées par les trajectoires orthogonales (T) qui s'appuient sur les lignes de courbure trouvées. Dans le cas particulier d'une famille de surfaces parallèles, les trajectoires orthogonales sont les normales à ces surfaces, et on retrouve le mode de construction indiqué ci-dessus.

Systèmes triples orthogonaux contenant une famille de plans

4. — Considérons une famille de plans (P) ; les trajectoires orthogonales s'obtiennent, comme on l'a vu à propos des surfaces moulures [Ch. VII, § 6], en faisant rouler un plan mobile sur la développable enveloppe des plans (P). Prenons dans le plan deux systèmes de courbes orthogonales, ce qui est toujours possible, car si nous nous donnons l'un des systèmes

$$\varphi(x, y) = a,$$

l'autre se détermine par l'intégration de l'équation :

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}.$$

On engendrera les autres familles du système triple orthogonal au moyen de ces courbes des plans (P), assujetties à rencontrer les trajectoires orthogonales ; ces familles sont ainsi constituées par des surfaces moulures. On peut ainsi, au moyen du Théorème de Dupin, retrouver leurs lignes de courbure.

Systèmes triples orthogonaux contenant une famille de sphères

5. — Le fait que toute famille de plans fait partie d'un système triple orthogonal tient, au fond, à ce que toute courbe d'un plan est

ligne de courbure du plan ; de sorte qu'une famille de surfaces orthogonales aux plans donnés satisfera à la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une troisième famille complétant le système triple orthogonal.

Le même fait sera donc vrai aussi pour une famille de sphères. Et pour déterminer un système triple orthogonal quelconque contenant la famille de sphères (S) donnée, il suffira : 1° de prendre sur une des sphères deux familles de courbes (C), (C_1) orthogonales ; 2° de déterminer les trajectoires orthogonales (T) des sphères (S). Car alors les courbes (T) qui s'appuient sur les courbes (C), et les courbes (T) qui s'appuient sur les courbes (C_1) engendreront les surfaces des deux familles (S_1) et (S_2) formant avec les sphères (S) le système triple cherché.

Tout revient donc à résoudre les *deux problèmes* suivants : 1° *déterminer sur une sphère un système orthogonal quelconque* ; 2° *déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille de sphères.*

Le premier problème se ramène immédiatement au problème analogue dans le plan au moyen d'une projection stéréographique.

Etudions le second :

Si nous considérons deux sphères de la famille, les trajectoires orthogonales établissent entre elles une correspondance point par point, et cette correspondance, d'après ce qui précède, sera telle qu'à un système orthogonal sur l'une des sphères corresponde un système orthogonal sur l'autre. Or deux directions rectangulaires sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes. D'autre part, dans une correspondance ponctuelle quelconque entre deux surfaces, le rapport anharmonique de quatre tangentes est un invariant ; car on peut supposer la correspondance exprimée de manière que les courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const., soient homologues, de sorte que les points homologues aient mêmes coordonnées curvilignes (u, v) ; et alors le rapport anharmonique de quatre tangentes et celui des quatre tangentes homologues sont égaux au même rapport anharmonique des quatre mêmes valeurs du rapport $\frac{dv}{du}$. Donc, dans la correspondance considérée, les directions isotropes sur une des sphères se transforment en directions isotropes sur l'autre. Les génératrices rectilignes de l'une des sphères se transforment donc en génératrices rectilignes de l'autre ; et le rapport anharmonique de deux directions quelconques avec les directions isotropes restant constant, les angles se conservent ; *la transformation établie entre les sphères d'une famille à un paramètre par leurs trajectoires orthogonales est donc une transformation conforme.*

Soit alors :

$$\Sigma(x - x_0)^2 - R^2 = 0, \tag{1}$$

l'équation générale des sphères considérées, dépendant d'un paramètre t ; les considérations précédentes nous conduisent à introduire les génératrices rectilignes. Posons donc :

$$x - x_0 + i(y - y_0) = \lambda\,[(z - z_0) + R],$$
$$x - x_0 - i(y - y_0) = -\frac{1}{\lambda}\,[(z - z_0) - R],$$
$$x - x_0 - i(y - y_0) = \mu\,[(z - z_0) + R]\,;$$

d'où :

$$\left\{\begin{aligned} z - z_0 &= R\,\frac{1 - \lambda\mu}{1 + \lambda\mu}, \\ x - x_0 + i(y - y_0) &= R\,\frac{2\lambda}{1 + \lambda\mu}, \\ x - x_0 - i(y - y_0) &= R\,\frac{2\mu}{1 + \lambda\mu}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Les équations différentielles des trajectoires orthogonales sont :

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0} = \frac{d(x + iy)}{x - x_0 + i(y - y_0)} = \frac{d(x - iy)}{x - x_0 - i(y - y_0)}\,;$$

en égalant le troisième rapport successivement aux deux derniers, et posant :

$$dA = \frac{d(x_0 + iy_0)}{2R}, \qquad dB = \frac{d(x_0 - iy_0)}{2R}, \qquad dC = \frac{dz_0}{2R},$$

on obtient les deux équations de Riccati,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda^2\frac{dB}{dt} + 2\lambda\frac{dC}{dt} - \frac{dA}{dt}, \qquad \frac{d\mu}{dt} = \mu^2\frac{dA}{dt} + 2\mu\frac{dC}{dt} - \frac{dB}{dt}. \tag{3}$$

On peut vérifier que, A et B étant, dans le cas où on opère sur des sphères réelles, des quantités imaginaires conjuguées, les solutions de la seconde de ces équations de Riccati sont des imaginaires conjuguées de celles de la première ; de sorte que tout revient à intégrer l'une d'elles.

Si on connaît une trajectoire orthogonale, on connaît une intégrale de chaque équation, et la résolution du problème est ramenée à deux quadratures. Si on connaît deux trajectoires orthogonales, on n'a plus qu'une seule quadrature à effectuer ; et si on connaît trois trajectoires

orthogonales, le problème s'achève sans quadrature. L'intégrale générale de la première équation est alors fournie par la formule :

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{\lambda^0 - \lambda_1^0}{\lambda^0 - \lambda_2^0} : \frac{\lambda_3^0 - \lambda_1^0}{\lambda_3^0 - \lambda_2^0},$$

en désignant par l'indice zéro les valeurs qui correspondent à $t = t_0$. C'est donc une relation de la forme :

$$\lambda = \frac{M\lambda^0 + N}{P\lambda^0 + Q}.$$

On aura de même, pour la seconde équation de Riccati, une intégrale de la forme :

$$\mu = \frac{R\mu^0 + S}{T\mu^0 + U},$$

les quantités complexes R, S, T, U étant, du reste, respectivement conjuguées de M, N, P, Q.

Ces deux formules définissent la correspondance établie par les trajectoires orthogonales entre la sphère qui correspond à la valeur t_0 du paramètre, et la sphère qui correspond à la valeur t du paramètre.

On reconnaît ainsi que cette transformation change les cercles d'une des sphères en cercles de l'autre ; car les cercles, sections planes de la sphère représentée par les équations (2), sont définis par une relation homographique en λ, μ. Par projection stéréographique, elle deviendrait une des transformations planes du groupe des rayons vecteurs réciproques [Ch. VIII, p. 236].

Systèmes triples orthogonaux particuliers

6. — Rappelons, comme systèmes triples orthogonaux particuliers, le système des quadriques homofocales :

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} - 1 = 0 ;$$

et le système des cyclides du quatrième degré homofocales [Ch. VIII, § 7],

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^2}{4R^2(d - \lambda)} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^2}{4R^2(e - \lambda)} = 0.$$

On vérifie qu'on obtient un autre système, formé de cyclides de Dupin du troisième degré, en considérant les surfaces lieux des points de contact des plans tangents menés, par un point d'un des axes, à une famille de quadriques homofocales.

CHAPITRE XIII

CONGRUENCES DE SPHÈRES ET SYSTÈMES CYCLIQUES

Généralités

1. — Nous appellerons *congruence de sphères* une famille de ∞^2 sphères (Σ) :

$$\Sigma(x-f)^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

f, g, h, r étant fonctions de deux paramètres u, v. Le lieu des centres de ces sphères est une surface (S) :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v). \tag{S}$$

Cherchons l'enveloppe de ces sphères. A l'équation (1) nous devrons adjoindre les deux équations :

$$\Sigma(x-f)\frac{\partial f}{\partial u} + r\frac{\partial r}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma(x-f)\frac{\partial f}{\partial v} + r\frac{\partial r}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

Ces équations (2) représentent une droite, donc l'enveloppe des sphères (Σ) touche chacune de ces sphères en deux points, que l'on appelle *points focaux* ; l'enveloppe (F), que l'on appellera *surface focale*, se décompose ainsi en deux nappes (F_1), (F_2).

Considérons dans la congruence (1) une famille de ∞^1 sphères (Σ) ; il suffit de définir u, v en fonction d'un paramètre t ; ces sphères admettent une enveloppe, qui touche chacune d'elles le long d'un cercle caractéristique dont le plan a pour équation :

$$\Sigma(x-f)df + rdr = 0. \tag{3}$$

Lorsque les expressions de u, v en fonction de t varient, tous ces cercles caractéristiques passent par deux points fixes, qui sont les points focaux de la sphère considérée. Les enveloppes ainsi obtenues correspondent aux surfaces réglées des congruences de droites ; on peut les appeler *surfaces canaux* de la congruence (1).

Cherchons parmi ces surfaces canaux celles pour lesquelles chaque

sphère est tangente à la sphère infiniment voisine. Ce sont en réalité des surfaces réglées à génératrices isotropes [Ch. VIII, § 3, p. 171]. Le cercle défini par les équations (1), (3) doit se réduire à un couple de droites isotropes; le plan (3) doit donc être tangent à la sphère (1), ce qui donne la condition :

$$\Sigma df^2 - dr^2 = 0, \tag{4}$$

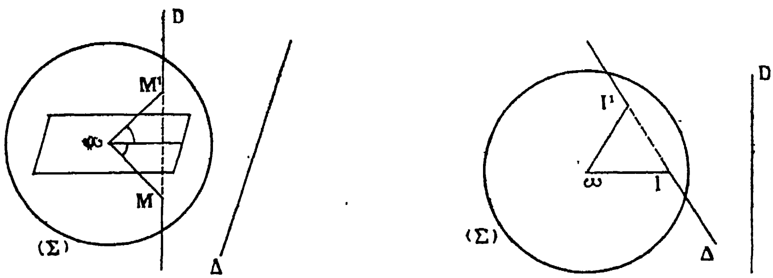
équation différentielle du premier ordre et du deuxième degré ; il y a donc deux familles spéciales de sphères, dans lesquelles chaque sphère touche la sphère infiniment voisine. Le point de contact est défini par les équations suivantes, que l'on obtient en écrivant les équations de la normale au plan (3) menée par le centre, et en tenant compte de (1) et de (4) :

$$\frac{x-f}{df} = \frac{y-g}{dg} = \frac{z-h}{dh} = \frac{-r}{dr}. \tag{5}$$

On voit que df, dg, dh sont les coefficients de direction du rayon du point de contact ; les cosinus directeurs sont :

$$-\frac{df}{dr}, \qquad -\frac{dg}{dr}, \qquad -\frac{dh}{dr}.$$

Soient I, I′ les points de contact ainsi trouvés. L'équation (4) définit sur la surface (S) deux directions ωI, ωI′ ; soient M, M′ les points de contact de la sphère (Σ) correspondante avec la surface focale (F) ; la droite MM′ est représentée par les deux équations (2), ou encore,



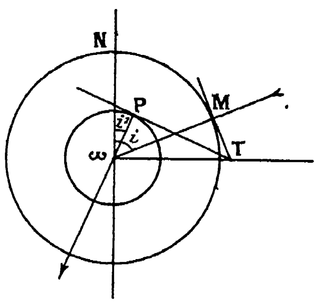
puisque les points M, M′ sont sur tous les cercles caractéristiques, par les deux équations (3) qui correspondent aux enveloppes spéciales (surfaces canaux isotropes) ; or dans ce cas l'équation (3) représente le plan tangent à la sphère en l'un des points I, I′ ; donc les droites II′, MM′ sont polaires réciproques par rapport à la sphère (Σ). On voit, du reste, que si, dans les équations (5), on considère le rapport $\frac{dv}{du}$ comme variable le point qu'elles définissent décrit une droite, qui, pour

$dv = 0$, et $du = 0$, contient les pôles des deux plans (2). Cette droite, qui est la droite II', est donc bien la conjuguée de MM'.

Si nous supposons que (Σ) soit une sphère réelle, I, I' sont imaginaires dans le cas où M, M' sont réels ; et inversement. Nous désignerons par (D) la droite MM', et par (Δ) la droite II' ; ωI, ωI' sont dans le plan tangent en ω à la surface (S) ; MM' est perpendiculaire à ce plan tangent ; les points M, M', et par suite les droites ωM, ωM' sont symétriques par rapport à ce plan tangent.

Remarquons maintenant que ωM est normale à la première nappe de la surface focale, et ωM' normale à la seconde ; et considérons ωM comme un rayon incident, et ωM' comme le rayon réfléchi sur la surface (S). Nous avons ainsi une congruence de normales qui se réfléchit sur la surface (S) suivant une congruence de normales. La surface (S) peut être quelconque, ainsi que la surface (F_1). Considérons, en effet, les sphères ayant leurs centres sur (S) et tangentes à (F_1) ; (F_1) sera l'une des nappes focales de la congruence de sphères ainsi obtenues, et la congruence des normales à (F_1) se réfléchira sur (S) suivant la congruence des normales à (F_2) deuxième nappe focale. D'où le *Théorème de Malus : Les rayons normaux à une surface quelconque se réfléchissent sur une surface quelconque suivant les normales à une nouvelle surface.*

Ce Théorème s'étend, comme on va voir, aux rayons réfractés. Reprenons, à cet effet, la construction classique d'Huyghens. Considérons une sphère de centre ω ; soit ωM le rayon incident, ωN la normale à la surface réfringente ; et soit n l'indice de réfraction. Construisons une deuxième sphère de centre ω et dont le rayon soit dans le rapport n avec le rayon de la première. Considérons le plan tangent en ω à la surface réfringente. Au point M où le rayon incident rencontre la première sphère, menons le plan tangent à cette sphère, qui coupe le plan ωT suivant une droite (T) ; et par la droite (T) menons le plan (T)P tangent à la seconde sphère. En appelant i, i' les angles de ωM et ωP avec ωN, on a immédiatement :



$$\omega T = \frac{\omega M}{\sin i} = \frac{\omega P}{\sin i'},$$

d'où :

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{\omega P}{\omega M} = n.$$

Donc ωP est le rayon réfracté. Partons alors d'une congruence de normales, soit (F_1) la surface normale et (Σ) les sphères tangentes à (F_1), dont les centres ω sont sur la surface réfringente ; pour construire les rayons réfractés, il faut considérer les sphères (Σ') concentriques aux sphères (Σ) et de rayon nr. Or la droite (Δ) relative aux sphères (Σ) est définie par les équations (5) où du, dv sont variables ; et ces équations ne changent pas lorsqu'on remplace r par nr. La droite (Δ) est donc la même pour une sphère (Σ) et pour la sphère (Σ') concentrique. Comme, d'autre part, elle est dans le plan tangent à (S) en ω, et dans le plan tangent en M à (Σ), c'est la droite (T) de la construction d'Huyghens ; et comme elle garde la même signification pour (Σ'), elle appartient aux plans tangents communs à (Σ') et à son enveloppe. Donc P est l'un des points de contact de (Σ') avec son enveloppe, et les rayons réfractés ωP sont normaux à l'une des nappes de la surface focale de la congruence des sphères (Σ').

Congruences spéciales

2. — A la congruence de sphères considérée nous avons associé quatre congruences de droites : celle des droites ωM normales à (F_1), celle des droites $\omega M'$ normales à (F_2), celle des droites (Δ), et celle des droites (D).

Supposons M, M′ confondus sur chaque sphère (Σ) ; ils sont confondus aussi avec I, I′ ; les deux nappes focales sont confondues ; alors le lieu des points I, I′ confondus qui correspond à chaque famille de sphères (Σ) satisfaisant à la condition (4) est une ligne de courbure de la surface focale double (F) ; et les sphères (Σ) de cette famille sont les sphères de courbure correspondantes. *La congruence de sphères est alors constituée par les sphères de courbure d'une surface* (F), *qui correspondent à l'une des familles de lignes de courbure.*

Réciproquement, considérons une surface (F) et ses sphères de courbure (Σ) d'une même famille : la surface (F) est surface focale double de la congruence de ces sphères de courbure. Car l'un des points I, I′ appartenant à (F), qui fait partie de la surface focale, est confondu avec un des points M, M′. Les deux droites conjuguées (Δ) et (D), se rencontrant, sont tangentes à (Σ) au même point ; et les points I, I′, M, M′ sont confondus en ce point. On retombe donc bien dans le cas considéré.

Toutes les congruences de droites considérées se réduisent ici à trois : celle des normales à la surface (F), celle des droites (D) tangentes à une famille de lignes de courbure de (F), et celle des droites (Δ) tangentes à l'autre famille. La surface (S) est alors l'une des nappes de la développée de la surface focale double. Aux lignes de courbure, intégrales de (4), correspond sur la surface (S) une famille de géodésiques [Ch. VII, § 2].

Application à la recherche des géodésiques

On est ainsi conduit à déterminer les géodésiques de (S) en écrivant que l'équation (4) a une racine double en du, dv. Cette équation s'écrit, avec les notations habituelles pour le ds^2 de (S) [Ch. II].

$$(6) \qquad E du^2 + 2F du dv + G dv^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial u} du + \frac{\partial r}{\partial v} dv\right)^2 = 0,$$

ou :

$$\left[E - \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\left[F - \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right] du dv + \left[G - \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 = 0.$$

Pour qu'il y ait une racine double, il faut et il suffit que :

$$\left[E - \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right]\left[G - \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right] - \left[F - \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right]^2 = 0$$

ou :

$$(7) \qquad H^2 - \left[E\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + G\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right] = 0$$

équation aux dérivées partielles qui détermine r. Ayant calculé r, on obtiendra la famille de géodésiques correspondante par l'intégration de l'équation différentielle ordinaire qu'on obtient en égalant à zéro la racine carrée du premier membre de (6) ; ce dernier est, en effet, à cause de la condition (7), le carré d'une forme linéaire en du, dv.

Les courbes de (S) définies par la condition $r =$ const. ont, de plus, la signification géométrique suivante. Si cette condition est réalisée, le centre ω de (Σ) décrit sur (S) une courbe (γ), et le point de contact M de (Σ) avec (F) décrit sur (F) une courbe (γ'). Comme ωM est normale à (F), (γ') reste orthogonale à ωM ; et, comme $\omega M = r$ est constant, (γ) est aussi orthogonale à chacune des droites ωM ; et, par conséquent, (γ) coupe à angle droit chacune des géodésiques considérées, puisque, en chaque point ω de (S), ωM est tangente à une de ces géodésiques.

Donc les courbes $r = \text{const.}$ de (S) sont les trajectoires orthogonales d'une famille de géodésiques [Cf. Ch. III, § 9]. On le vérifie immédiatement en remarquant que l'équation (6), ayant pour premier membre un carré parfait, a pour conséquence, quels que soient δu et δv,

$$(\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv)\delta u + (\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv)\delta v = \left(\frac{\partial r}{\partial u}du + \frac{\partial r}{\partial u}dv\right)\frac{\partial r}{\partial u}\delta u + \\ + \left(\frac{\partial r}{\partial u}du + \frac{\partial r}{\partial v}dv\right)\frac{\partial r}{\partial v}\delta v \equiv dr\delta r.$$

Le premier membre s'annule donc si on suppose $\delta r = 0$; ce qui exprime bien l'orthogonalité des géodésiques considérées et des courbes $r = \text{const.}$

Théorème de Dupin

3. — Supposons que la surface focale (F) ait ses deux nappes (F_1) et (F_2) distinctes, et étudions leurs relations avec la surface (S), lieu des centres des sphères (Σ). Les cosinus directeurs de $\omega\mathrm{M}$, normale à une des nappes, sont, en désignant par x, y, z les coordonnées de M,

$$\lambda = \frac{x-f}{r}, \qquad \mu = \frac{y-g}{r}, \qquad \nu = \frac{z-h}{r};$$

d'où, pour les équations de la nappe focale considérée,

$$(8) \qquad x = f + \lambda r, \qquad y = g + \mu r, \qquad z = h + \nu r.$$

Portons ces valeurs de x, y, z dans les équations (2) ; elles deviennent :

$$(9) \qquad \Sigma\lambda\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\lambda\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v} = 0.$$

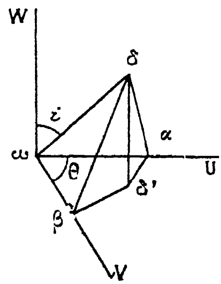
Ces équations, jointes à $\Sigma\lambda^2 = 1$, définissent les deux systèmes de valeurs de λ, μ, ν, qui correspondent aux deux nappes.

Soient i, i' les angles de $\omega\mathrm{M}$ et $\omega\mathrm{M}'$ avec la normale $\omega\mathrm{N}$ au lieu (S) du centre ω ; ces angles sont supplémentaires, $\cos i' = -\cos i$; et si l, m, n sont les cosinus directeurs de $\omega\mathrm{N}$,

$$(10) \qquad \cos i = \Sigma\lambda l.$$

Calculons l'angle i. Il suffirait de tirer λ, μ, ν des équations (9) et (10)

et de porter les valeurs obtenues dans $\Sigma\lambda^2 = 1$. Pour éviter ce calcul, nous emploierons une autre méthode. Dans le plan tangent à (S), soient ωU, ωV les tangentes aux courbes $v = c^{te}$, $u = c^{te}$, dirigées dans le sens des u et des v croissants.



Les cosinus directeurs de ωU sont :

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial h}{\partial u};$$

Ceux de ωV sont :

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial g}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial h}{\partial v}.$$

Soit $\omega\delta$ le vecteur, de longueur 1, porté par la demi-droite ωM ; ses projections orthogonales $\omega\alpha$, $\omega\beta$ sur ωU, ωV sont, d'après les formules (9),

$$\omega\alpha = A = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial r}{\partial u}, \qquad \omega\beta = B = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial r}{\partial v}.$$

Le sinus de i est la projection $\omega\delta'$ de $\omega\delta$ sur le plan UOV, et tout revient à calculer $\omega\delta'$. Soit θ l'angle de ωU et ωV :

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{H}{\sqrt{EG}}.$$

Comme $\omega\delta'$ est le diamètre du cercle circonscrit au triangle $\omega\alpha\beta$, dont le côté $\alpha\beta$ est $\sqrt{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}$, nous obtenons immédiatement :

$$\sin^2 i = \omega\delta'^2 = \frac{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}{\sin^2\theta}.$$

Or :

$$\frac{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{H^2}\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial v}, -\frac{\partial r}{\partial u}\right),$$

en posant, suivant nos notations habituelles,

$$\Phi(du, dv) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Nous obtenons donc la formule cherchée :

$$\sin^2 i = \frac{1}{H^2}\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial v}, -\frac{\partial r}{\partial u}\right). \tag{11}$$

Nous revenons maintenant aux équations (8), et nous nous proposons de déterminer les lignes de courbure de la nappe de la surface

focale qu'elles représentent. Ces lignes de courbure sont définies par l'équation :

$$| \; dx \quad \lambda \quad d\lambda \; | = 0,$$

ou :

$$| \; df + \lambda . dr + r . d\lambda \quad \lambda \quad d\lambda \; | = 0 ;$$

qui se réduit à :

$$| \; df \quad \lambda \quad d\lambda \; | = 0.$$

Multiplions par le déterminant :

$$\left| \lambda \quad \frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \right|,$$

qui n'est pas nul, la normale ωM n'étant pas dans le plan tangent de (S). L'équation devient :

$$\begin{vmatrix} \Sigma\lambda df & \Sigma\lambda^2 & \Sigma\lambda d\lambda \\ \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}df & \Sigma\lambda\frac{\partial f}{\partial u} & \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}d\lambda \\ \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}df & \Sigma\lambda\frac{\partial f}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}d\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en tenant compte de (9) :

$$\begin{vmatrix} -dr & 1 & 0 \\ \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}df & -\frac{\partial r}{\partial u} & \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}d\lambda \\ \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}df & -\frac{\partial r}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}d\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première ligne par $\frac{\partial r}{\partial u}$ et ajoutons à la deuxième, puis par $\frac{\partial r}{\partial v}$ et ajoutons à la troisième. Nous obtenons l'équation :

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}df - \frac{\partial r}{\partial u}dr & \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}d\lambda \\ \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}df - \frac{\partial r}{\partial v}dr & \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}d\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les éléments de la première colonne sont les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme quadratique :

$$(13) \qquad \Sigma df^2 - dr^2 = \Phi_1(du, dv)$$

qui définit sur (S) le couple des directions ωI, $\omega I'$. Voyons si les éléments de la deuxième colonne sont susceptibles d'une interprétation analogue. Si nous différentions les équations (9), nous obtenons :

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda = -\Sigma \lambda d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - d\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right);$$

or, si on différentie totalement par rapport aux variables indépendantes u, v, en supposant, par conséquent, $d^2u = d^2v = 0$,

$$d\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(d^2r)}{\partial(du)}, \qquad d\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial(d^2f)}{\partial(du)};$$

et :

$$\Sigma\lambda . d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial(\Sigma\lambda . d^2f)}{\partial(du)}.$$

Posons :

$$(14) \qquad \Theta(du, dv) = \Sigma\lambda d^2f, \qquad \Omega(du, dv) = \Theta + d^2r,$$

et l'équation s'écrit :

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial du} & \frac{\partial \Omega}{\partial du} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial dv} & \frac{\partial \Omega}{\partial dv} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc les directions principales de la nappe de (F) considérée sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux couples $\Phi_1 = 0$ et $\Omega = 0$.

Calculons Θ. Pour cela, éliminons λ, μ, ν entre les équations (9), (10) et :

$$\Sigma\lambda d^2f - \Theta = 0;$$

nous obtenons :

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & l & d^2f \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & m & d^2g \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & n & d^2h \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} & -\cos i & -\Theta \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne, en développant par rapport aux éléments de la dernière ligne,

$$\Theta H - H \cos i.\Psi(du, dv) + H\chi(du, dv) = 0.$$

Dans cette formule, $\Psi(du, dv)$ désigne, comme au Ch. II, § 3, la forme $\Sigma l d^2 x$; mais l, m, n sont ici des cosinus directeurs. La forme $\chi(du, dv)$ se déduit du premier membre de (16) en remplaçant par des zéros les éléments $-\cos i$, $-\Theta$; et divisant par H Par une combinaison des deux premières colonnes, on obtient, par un déterminant du troisième degré,

$$H\chi = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} & l & d^2 f \end{vmatrix};$$

et il suffit de multiplier les deux membres par le déterminant :

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & l \end{vmatrix},$$

pour obtenir :

$$(17) \qquad H^2\chi = \begin{vmatrix} F\frac{\partial r}{\partial u} - E\frac{\partial r}{\partial v} & \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} d^2 f \\ G\frac{\partial r}{\partial u} - F\frac{\partial r}{\partial v} & \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} d^2 f \end{vmatrix},$$

qui, d'après les calculs du Ch. II, § 4, p. 31, s'exprime au moyen de E, F, G et de leurs dérivées. Nous avons, dès lors,

$$\Omega = d^2 r + \cos i.\Psi(du, dv) - \chi(du, dv),$$

ou :

$$(18) \qquad \Omega = \Psi_1(du, dv) + \cos i.\Psi(du, dv),$$

avec :

$$\Psi_1 = d^2 r - \chi.$$

Les lignes de courbure de la seconde nappe sont de même tangentes aux directions conjuguées par rapport à $\Phi_1 = 0$ et au couple qu'on déduit de $\Omega = 0$ en changeant le signe de cos i, c'est-à-dire :

$$\Psi_1(du, dv) - \cos i.\Psi(du, dv) = 0.$$

Considérons comme homologues, sur les deux nappes, les points de contact d'une même sphère (Σ) avec ces deux nappes. Il résulte alors des conclusions précédentes que pour que les lignes de courbure se

correspondent sur les deux nappes, c'est-à-dire, pour qu'elles soient définies par la même équation quadratique (15) en du, dv, il faut et il suffit qu'il existe un couple de variations du, dv conjugué par rapport aux trois couples :

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 + \cos i . \Psi = 0, \qquad \Psi_1 - \cos i . \Psi = 0,$$

c'est-à-dire par rapport aux couples :

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 + \cos i . \Psi = 0, \qquad \Psi = 0,$$

ou encore :

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 = 0, \qquad \Psi = 0.$$

Sur la surface (S), l'équation (15) définit les courbes suivant lesquelles les développables des normales à l'une des nappes de (F) coupent (S). La condition pour que ces courbes soient aussi l'intersection de (S) avec les développables des normales à l'autre nappe de (F) est donc qu'en chaque point de (S) leurs directions soient conjuguées harmoniques par rapport aux directions définies par $\Psi = 0$, c'est-à-dire qu'elles soient des directions conjuguées sur (S).

Nous obtenons ainsi le *Théorème de Dupin : si les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes focales, les développables des normales correspondantes coupent la surface* (S) *suivant le même réseau conjugué ; et réciproquement*. Ou encore : *la condition nécessaire et suffisante pour que les développables d'une congruence de normales se réfléchissent sur une surface suivant des développables est qu'elles déterminent sur la surface un réseau conjugué.*

Congruence des droites (D)

4. — Cherchons les développables de la congruence des droites (D) ; elles sont définies par l'équation :

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ l & m & n \\ dl & dm & dn \end{vmatrix} = 0 ;$$

x, y, z désignant toujours les coordonnées de M, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale à (S) en ω, qui est parallèle à (D).

Or :

$$x = f + r\lambda, \qquad y = g + r\mu, \qquad z = h + r\nu,$$

d'après les équations (8) et l'équation (19) devient :

$$\left| \, df + rd\lambda + \lambda dr \quad l \quad dl \, \right| = 0.$$

Multiplions le premier membre par le déterminant non nul :

$$H = \left| \, l \quad \frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \, \right| ;$$

nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} r\Sigma l d\lambda + dr\Sigma\lambda l & 1 & 0 \\ \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} df + r\Sigma \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda + dr.\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial u} & 0 & \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} dl \\ \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} df + r\Sigma \frac{\partial f}{\partial v} d\lambda + dr.\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial v} & 0 & \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} dl \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} df + r\Sigma \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda + dr.\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial u} & \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} dl \\ \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} df + r\Sigma \frac{\partial f}{\partial v} d\lambda + dr.\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial v} & \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} dl \end{vmatrix} = 0.$$

Les éléments de la deuxième colonne sont les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme $\Psi(du, dv)$. Quant aux éléments de la première, remarquons que, d'après un calcul du paragraphe précédent,

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial du}, \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} d\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial dv} ;$$

où, d'après (18),

$$\Omega = \Psi_1 + \cos i . \Psi .$$

Enfin les points M, M′ sont définis par les relations (9) :

$$\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

de sorte que, avec la notation introduite par la formule (13),

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial u} df + dr\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} df - \frac{\partial r}{\partial u} dr = \frac{1}{2} \frac{d\Phi_1}{\partial du},$$

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial v} df + dr\Sigma\lambda \frac{\partial f}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial v} df - \frac{\partial r}{\partial v} dr = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial dv}.$$

Les éléments de la première colonne sont donc les demi dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme $\Phi_1 - r[\Psi_1 + \Psi \cos i]$.

Ainsi : les développables de la congruence des droites (D) correspondent sur la surface (S) aux courbes dont les tangentes sont conjuguées, en chaque point, par rapport aux couples de directions définis par les équations :

$$\Psi = 0, \qquad \Phi_1 - r[\Psi_1 + \Psi \cos i] = 0,$$

ou par rapport aux couples :

$$\Psi = 0, \qquad \Phi_1 - r\Psi_1 = 0; \tag{21}$$

le résultat, comme on devait s'y attendre, ne change pas si on change i en $\pi - i$; et *les développables de la congruence des droites* (D) *correspondent sur la surface* (S) *à un réseau conjugué.*

Considérons les plans focaux; un plan focal est parallèle à la direction $l, m, n,$ et à la direction dl, dm, dn qui correspond à une droite (D) infiniment voisine, sur l'une des développables passant par (D). Mais :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

d'où :

$$ldl + mdm + ndn = 0;$$

dl, dm, dn définissent donc la direction des droites du plan focal parallèles au plan tangent à la surface. Or les deux directions correspondant aux deux plans focaux, donc aux deux développables, étant conjuguées, si nous les définissons par les caractéristiques d et δ, elles satisfont à l'équation :

$$\Sigma . dl . \delta f = 0;$$

qui exprime que le premier plan focal est perpendiculaire à la direction $\delta f, \delta g, \delta h$ qui correspond à l'autre plan focal. *Chaque plan focal est perpendiculaire à la direction de la surface* (S) *correspondant à la développable qui n'est pas tangente à ce plan focal.*

Congruence des droites (Δ)

5. — La droite (Δ) est l'intersection des plans tangents à la sphère en M, et à la surface (S) en ω, qui ont respectivement pour équations :

$$\Sigma\lambda(X - f) - r = 0, \qquad \Sigma l(X - f) = 0.$$

Cherchons les développables. Exprimons que la droite précédente rencontre la droite infiniment voisine. Cela donne :

$$\Sigma d\lambda.(X - f) - \Sigma\lambda df - dr = 0, \qquad \Sigma dl.(X - f) - \Sigma l df = 0\,;$$

conditions qui se simplifient en remarquant que :

$$\Sigma l df = 0, \quad \text{et} \quad \Sigma\lambda df + dr = 0.$$

Il reste :

$$(22) \qquad \Sigma d\lambda.(X - f) = 0, \qquad \Sigma dl.(X - f) = 0.$$

Exprimons que les équations obtenues sont compatibles, nous obtenons l'équation qui définit les développables :

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} l & d\lambda & dl \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions encore par le déterminant non nul

$$\begin{vmatrix} l & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} :$$

nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} 1 & \Sigma l d\lambda & 0 \\ 0 & \Sigma d\lambda.\frac{\partial f}{\partial u} & \Sigma dl.\frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & \Sigma d\lambda.\frac{\partial f}{\partial v} & \Sigma dl.\frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}d\lambda & \Sigma\frac{\partial f}{\partial u}dl \\ \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}d\lambda & \Sigma\frac{\partial f}{\partial v}dl \end{vmatrix} = 0\,;$$

les éléments de la première colonne sont, au signe près, les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme $\Omega = \Psi_1 + \Psi \cos i$. Ceux de la deuxième colonne sont les demi-dérivées partielles de Ψ. Les développables de la congruence des droites (Δ) correspondent donc sur la surface (S) au réseau de courbes dont les directions sont, en chaque point, conjuguées harmoniques par rapport aux couples de directions définis par les équations :

$$(25) \qquad \Psi = 0, \qquad \Psi_1 = 0.$$

En particulier, *les développables de la congruence des droites* (Δ) *correspondent, sur la surface* (S), *à un réseau conjugué.*

Quant aux points focaux, ils sont définis par les équations de (Δ) et les équations (22), compatibles en vertu de la relation (23). On en déduit que les directions joignant ω aux points focaux sont définies par les relations :

$$\Sigma l.\delta f = 0, \qquad \Sigma dl.\delta f - 0, \qquad \Sigma d\lambda.\delta f = 0\,;$$

la première exprime que ces droites sont dans le plan tangent à (S), la seconde que ce sont les tangentes conjuguées des directions de (S) qui correspondent aux développables.

Cas particuliers. — Supposons que les deux congruences précédentes se correspondent par développables. Les deux réseaux conjugués que nous avons déterminés sur la surface (S) sont alors confondus ; il faut et il suffit pour cela que les trois couples :

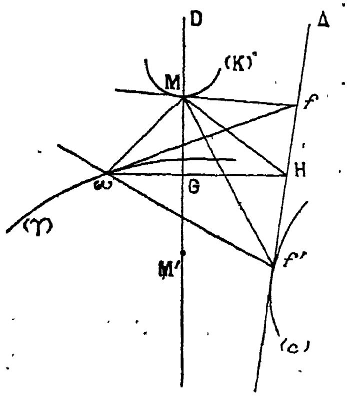
$$\Psi = 0, \qquad \Psi_1 = 0, \qquad \Phi_1 - r.\Psi_1 = 0,$$

ou :

$$\Psi = 0, \qquad \Psi_1 = 0, \qquad \Phi_1 = 0$$

appartiennent à une même involution, et alors, d'après les résultats du § 2, les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface (S) ; et réciproquement.

Nous avons, dans ce cas, sur la surface (S), un réseau conjugué (R) qui correspond aux développables des quatre congruences ωM, ωM′, (D), (Δ). Les points focaux f, f' de (Δ) sont, d'après ce que nous venons de voir, sur les tangentes aux deux courbes du réseau qui passent par ω. Les droites Mf, Mf' sont les tangentes en M aux lignes de courbure d'une des nappes de la surface enveloppe (F), car les plans tangents aux développables des normales à cette nappe sont Mωf et M$\omega f'$, puisque ces développables coupent (S) suivant le réseau conjugué (R) considéré ; et le plan M(Δ), qui coupe ces plans suivant Mf et Mf', est tangent en M à cette même nappe de (F). La droite (D) est perpendiculaire au plan, tangent à (S), $f\omega f'$, et ses plans focaux sont perpendiculaires à ωf et $\omega f'$. Les développables de la congruence des droites (D) coupent, de plus, les deux nappes de l'enveloppe (F) suivant leurs lignes de courbure.



Le système triple de Ribaucour

6. — Plaçons-nous dans ce dernier cas ; soit (γ) une des courbes du réseau conjugué (R) de la surface (S) ; quand ω décrit (γ), le point M

décrit une ligne de courbure (K) de la nappe de la surface (F) qui est tangente à Mf, et la droite (Δ) enveloppe une courbe (C), lieu de f'. Considérons la sphère (σ) de centre f' et passant par M ; cette sphère a pour enveloppe une surface canal (E) ; la sphère (σ), ayant son rayon Mf' perpendiculaire à Mf, est constamment tangente à la courbe (K), donc le point M est un point du cercle caractéristique (H) ; le plan de ce cercle est perpendiculaire à la droite Δ tangente à (C), son centre H sera le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Δ ; ce cercle sera donc orthogonal à la sphère (Σ) au point M et au point M^1 symétrique par rapport au plan $f\omega f'$; et la surface (E) est engendrée par le cercle orthogonal à la sphère (Σ) aux points M, M^1 ; ce cercle tangent en M à ωM reste orthogonal à la ligne de courbure (K) ; or il est ligne de courbure sur la surface (E), donc (K) est aussi ligne de courbure sur la surface (E). Si nous faisons varier (K), nous obtenons une famille de surfaces (E) qui seront toutes orthogonales aux deux nappes (F_1), (F_2) de (F), et qui les couperont suivant des lignes de courbure.

Si maintenant nous cherchons sur (F_1) et sur (F_2) les seconds systèmes de lignes de courbure, nous devrons considérer les sphères de centres f et passant par M ; le cercle caractéristique sera encore le cercle (H) ; de plus, fM et $f'M$ étant perpendiculaires, les sphères (σ), (σ') correspondantes sont orthogonales, donc aussi leurs enveloppes (E), (E').

Nous avons donc deux familles de surfaces canaux qui se coupent orthogonalement suivant des lignes de courbure, les cercles (H) ; donc elles appartiennent à un système triple orthogonal. Autrement dit, les cercles (H) sont orthogonaux à une famille de surfaces, à laquelle appartiennent les deux nappes (F_1), (F_2) de (F) ; et ils établissent une correspondance entre les points de deux quelconques de ces surfaces, comme entre les points M, M', telle qu'il y ait correspondance entre les lignes de courbure de ces surfaces.

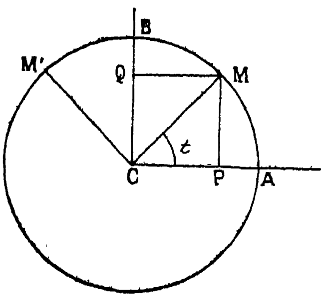
Réciproquement, si deux surfaces (F_1), (F_2) sont orthogonales à une famille de ∞^2 cercles (H), et si M et M' sont les points où un de ces cercles coupe respectivement (F_1) et (F_2), la sphère (Σ) orthogonale à ce cercle en ces deux points est tangente à (F_1) et (F_2), qui sont ainsi les deux nappes de l'enveloppe des sphères (Σ) ainsi définies. Si, de plus, les cercles (H) qui ont leurs pieds sur (F_1) le long d'une ligne de courbure coupent aussi (F_2) aux divers points d'une ligne de courbure, les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe des sphères (Σ), et on retombe sur le cas particulier que l'on vient d'étudier.

Donc *si les cercles* (H) *d'une congruence sont orthogonaux à deux surfaces* (F_1), (F_2), *et s'ils établissent une correspondance*

entre les lignes de courbure de ces deux surfaces, ils sont orthogonaux à une infinité de surfaces sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent ; ces surfaces appartiennent à un système triple orthogonal dont les deux autres familles sont constituées par des surfaces canaux, dont chacune est engendrée par ceux des cercles (H) *qui s'appuient sur une des lignes de courbure de* (F_1), *ou* (F_2). De telles congruences de cercles s'appellent *systèmes cycliques* (Ribaucour).

Congruences de cercles et systèmes cycliques

7. — Nous allons reprendre analytiquement la question des systèmes cycliques. Considérons une famille de ∞^2 cercles, et cherchons d'abord s'il existe des surfaces normales à tous ces cercles. Soit (K) l'un d'eux, $C(x_0, y_0, z_0)$ son centre, ρ son rayon, x_0, y_0, z_0, ρ étant fonctions de deux paramètres u, v. Pour définir le plan de ce cercle, nous définirons par leurs cosinus directeurs deux directions rectangulaires $CA(a, b, c)$ et $CB(a', b', c')$ passant par le centre du cercle, et nous fixerons la position d'un point M sur le cercle par l'angle $(CA, CM) = t$, compté positivement de CA vers CB. Les coordonnées de M par rapport au système CAB sont $\rho \cos t$, $\rho \sin t$, et ses coordonnées x, y, z sont :



$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \rho(a\cos t + a'\sin t) = x_0 + \rho\alpha', \\ y &= y_0 + \rho(b\cos t + b'\sin t) = y_0 + \rho\beta', \\ z &= z_0 + \rho(c\cos t + c'\sin t) = z_0 + \rho\gamma'. \end{aligned}\right.$$

Cherchons à déterminer t, en fonction de u, v, de façon que la surface lieu du point correspondant admette pour normale la tangente au cercle au point M, dont nous désignerons par α, β, γ les cosinus directeurs. Nous avons, à cet effet, la condition :

$$(2)\qquad \Sigma \alpha dx = 0$$

qui est l'équation aux différentielles totales des surfaces cherchées. Développons cette équation ; α, β, γ sont les projections du segment directeur de la direction CM' correspondant à $t + \frac{\pi}{2}$:

$\alpha = -a \sin t + a' \cos t, \quad \beta = -b \sin t + b' \cos t, \quad \gamma = -c \sin t + c' \cos t.$
D'autre part :

$dx = dx_0 + \alpha'.d\rho + \rho\alpha.dt + \rho(\cos t.da + \sin t.da'), \ dy = ..., \ dz = ...;$
et, en tenant compte de

$$\Sigma\alpha^2 = 1, \qquad \Sigma\alpha\alpha' = 0,$$

on en conclut que :

$$\Sigma\alpha dx = \Sigma\alpha dx_0 + \rho.dt + \rho[\cos t.\Sigma\alpha da + \sin t.\Sigma\alpha da'] =$$
$$= -\sin t.\Sigma a dx_0 + \cos t.\Sigma a' dx_0 + \rho dt + \rho[\cos^2 t.\Sigma a' da - \sin^2 t.\Sigma a da'] = 0.$$

Mais :

$$\Sigma a a' = 0,$$

d'où en différentiant :

$$\Sigma a da' + \Sigma a' da = 0;$$

et l'équation (2) s'écrit simplement :

$$dt = \Sigma a da' + \frac{1}{\rho} \Sigma a dx_0 . \sin t - \frac{1}{\rho} \Sigma a' dx_0 . \cos t. \tag{3}$$

Posons :

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = w, \tag{4}$$

$$t = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} w,$$

et nous obtenons :

$$2dw = (1 + w^2)\Sigma a da' + \frac{2w}{\rho} \Sigma a dx_0 + \frac{w^2 - 1}{\rho} \Sigma a' dx_0. \tag{5}$$

Cette équation jouit de propriétés analogues à celles de l'équation de Riccati. En particulier, on peut vérifier que le rapport anharmonique de quatre solutions a une différentielle totale constante ; et, par conséquent, est constant. Elle peut se mettre sous la forme :

$$dw = \mathrm{A}du + \mathrm{A}'dv + w(\mathrm{B}du + \mathrm{B}'dv) + w^2(\mathrm{C}du + \mathrm{C}'dv),$$

et se décompose en deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \mathrm{A} + \mathrm{B}w + \mathrm{C}w^2, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'w + \mathrm{C}'w^2; \tag{6}$$

En écrivant que $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ tiré de la première est égal à $\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}$ tiré de la seconde, on en déduit :

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + w\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + w^2\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} + (\mathrm{B} + 2\mathrm{C}w)(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'w + \mathrm{C}'w^2) - \tag{7}$$
$$-\left[\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} + w\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial u} + w^2\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial u} + (\mathrm{B}' + 2\mathrm{C}'w)(\mathrm{A} + \mathrm{B}w + \mathrm{C}w^2)\right] = 0.$$

Toute intégrale du système (6) satisfait donc à cette condition, qui est de la forme :

$$L + Mw + Nw^2 = 0. \tag{8}$$

Si cette condition n'est pas identiquement satisfaite, il ne peut y avoir d'autres solutions que celles de cette équation (8), qui en admet deux. Si l'on veut qu'il y en ait une infinité, cette condition doit donc être identiquement satisfaite, et comme elle est du second degré, il suffit qu'elle soit satisfaite par trois fonctions. Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} L &= \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial A'}{\partial u} + BA' - AB' = 0, \\ M &= \frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u} + 2(CA' - AC') = 0, \\ N &= \frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial C'}{\partial u} + CB' - BC' = 0. \end{aligned}\right.$$

Il résulte de la théorie des équations aux dérivées partielles que, si elles sont des identités, le système (6) a, effectivement, une infinité de solutions.

Donc *si les cercles d'une congruence sont normaux à trois surfaces, ils sont normaux à une infinité de surfaces.*

Il est facile de construire des cercles normaux à deux surfaces quelconques, car il existe ∞^2 sphères tangentes aux deux surfaces, et les cercles orthogonaux à ces sphères aux points de contact sont normaux aux deux surfaces. Si les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces, on a alors, comme on l'a vu, un système cyclique, composé de cercles normaux à ∞^1 surfaces.

Remarquons que si la famille des ∞^2 cercles donnés est formée de cercles normaux à deux surfaces, on doit prévoir que les conditions d'intégrabilité (9) se réduiront à une seule. D'autre part, si on a une enveloppe de sphères, pour exprimer que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes, on obtient aussi une seule condition. Il reste à examiner si ces conditions sont identiques.

Supposons d'abord qu'il existe une surface (F_1) normale à tous les cercles (1) ; nous pouvons faire en sorte qu'elle corresponde à $t = 0$, ou $w = 0$. Alors l'équation (5) admet la solution $w = 0$, d'où la condition :

$$\Sigma a da' - \frac{1}{\rho} \Sigma a' dx_0 = 0 ;$$

et cette équation (5) devient :

$$dw = w^2 \Sigma a da' + \frac{w}{\rho} \Sigma a dx_0. \tag{10}$$

Soit : $M_0(x, y, z)$ le point correspondant à $t = 0$:

$$\begin{array}{lll} x = x_0 + \rho a, & y = y_0 + \rho b, & z = z_0 + \rho c; \\ x_0 = x - \rho a, & y_0 = y - \rho a, & z_0 = z - \rho c; \\ dx_0 = dx - \rho da - a d\rho, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots; \end{array}$$

d'où :

$$\Sigma a dx_0 = \Sigma a dx - d\rho.$$

Si maintenant nous considérons la normale (l, m, n) en M_0 à (F_1), c'est la tangente au cercle, et (10) devient :

$$dw = w^2 \Sigma a dl + \frac{w}{\rho} (\Sigma a dx - d\rho),$$

ou :

$$\frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = w.\Sigma a dl + \frac{1}{\rho} \Sigma a dx.$$

Nous introduisons ainsi la quantité :

$$\rho w = r, \tag{11}$$

et nous obtenons :

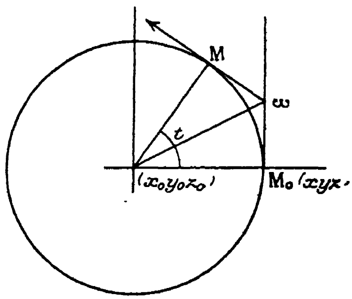
$$\frac{dr}{r} = \frac{r}{\rho} \Sigma a dl + \frac{1}{\rho} \Sigma a dx,$$

ou :

$$dr = \frac{r^2}{\rho} \Sigma a dl + \frac{r}{\rho} \Sigma a dx. \tag{12}$$

Or, d'après (4),

$$r = \rho \operatorname{tg} \frac{t}{2},$$



ce qui montre que r est le rayon de la sphère (Σ) tangente aux surfaces lieux de M et M_0 ; son centre est le point ω intersection des tangentes au cercle en M et M_0.

Supposons maintenant qu'il existe une deuxième surface (F_2) normale aux cercles. Posons :

$$\frac{1}{r} = S, \tag{13}$$

$$dr = -r^2.dS;$$

et l'équation (12) devient :

$$dS + \frac{S}{\rho}\Sigma a dx + \frac{1}{\rho}\Sigma a dl = 0.$$

Soit S_1, la solution connue :

$$(14) \qquad dS_1 + \frac{S_1}{\rho}\Sigma a dx + \frac{1}{\rho}\Sigma a dl = 0,$$

d'où en retranchant :

$$d(S - S_1) + \frac{S - S_1}{\rho}\Sigma a dx = 0,$$

$$(15) \qquad d\log(S - S_1) = -\frac{1}{\rho}\Sigma a dx.$$

Pour que l'équation ait d'autres intégrales, il faut et il suffit que $\frac{1}{\rho}\Sigma a dx$ soit différentielle exacte. Or nous avons, d'après (14),

$$(16) \quad \frac{\partial S_1}{\partial u} + \frac{S_1}{\rho}\Sigma a\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\rho}\Sigma a\frac{\partial l}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} + \frac{S_1}{\rho}\Sigma a\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{\rho}\Sigma a\frac{\partial l}{\partial v} = 0.$$

Supposons que les lignes coordonnées soient lignes de courbure sur (F_1). Les formules d'Olinde Rodrigues donnent, en désignant par R, R' les rayons de courbure principaux,

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial m}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial n}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial z}{du},$$

$$\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{1}{R'}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{1}{R'}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial n}{\partial v} = -\frac{1}{R'}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Posons :

$$(17) \qquad -\frac{1}{R} = T, \qquad -\frac{1}{R'} = T',$$

et nous aurons donc :

$$(18) \quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial l}{\partial u} = T\dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial m}{\partial u} = T\dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial n}{\partial u} = T\dfrac{\partial z}{\partial u}. \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} = T'\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial m}{\partial v} = T'\dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial n}{\partial v} = T'\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{array}\right.$$

Alors :

$$\Sigma a\frac{\partial l}{\partial u} = T.\Sigma a\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \Sigma a\frac{\partial l}{\partial v} = T'.\Sigma a\frac{\partial x}{\partial v},$$

et les conditions (16) pour que S_1 soit intégrale deviennent :

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} + (S_1 + T)\frac{\Sigma a\frac{\partial x}{\partial u}}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial v} + (S_1 + T')\frac{\Sigma a\frac{\partial x}{\partial v}}{\rho} = 0;$$

d'où :

$$-\frac{1}{\rho}\,\Sigma a dx = \frac{1}{S_1 + T}\frac{\partial S_1}{\partial u}\,du + \frac{1}{S_1 + T'}\frac{\partial S_1}{\partial v}\,dv.$$

Exprimons maintenant que le second membre est une différentielle exacte, et nous aurons pour définir les systèmes de cercles normaux à ∞^1 surfaces, en supprimant l'indice de S_1, l'équation aux dérivées partielles :

$$(19)\qquad \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{S + T}\frac{\partial S}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{S + T'}\frac{\partial S}{\partial v}\right) = 0.$$

Dans cette équation, T et T′ sont les courbures principales d'une surface rapportée à ses lignes de courbure,

$$u = \text{const.},\qquad v = \text{const.}\,;$$

S est l'inverse du rayon d'une sphère (Σ) tangente à cette surface au point (u, v). Et le système de ∞^2 cercles défini par une solution de cette équation est constitué par les cercles orthogonaux aux sphères (Σ) correspondantes en leurs points de contact avec leur enveloppe. La surface donnée est, du reste, une des nappes de cette enveloppe.

Nous allons voir que *cette équation* (19) *exprime précisément que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe*. D'après le Théorème de Dupin, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les lignes de courbure de la surface donnée (F_1) correspondent à un réseau conjugué sur la surface lieu de ω. Soient X, Y, Z les coordonnées de ω :

$$(20)\qquad X = x + \frac{1}{S}\,l,\qquad Y = y + \frac{1}{S}\,m,\qquad Z = z + \frac{1}{S}\,n.$$

Pour que, sur la surface définie par ces formules, les courbes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ forment un réseau conjugué, il faut et il suffit que :

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, en tenant compte des formules d'Olinde Rodrigues (18),

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{T}{S}\frac{\partial x}{\partial u} + l\,\frac{\partial\left(\frac{1}{S}\right)}{\partial u} = \left(1 + \frac{T}{S}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + l\,\frac{\partial\left(\frac{1}{S}\right)}{\partial u},\qquad \ldots,\qquad \ldots;$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(1 + \frac{T'}{S}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + l\,\frac{\partial\left(\frac{1}{S}\right)}{\partial v}$$

relations qu'on peut encore écrire :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{S+T}{S^2}\left[S\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{S+T}\frac{\partial S}{\partial u}\,l\right] \quad , \quad \ldots, \quad \ldots; \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{S+T'}{S^2}\left[S\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{S+T'}\frac{\partial S}{\partial v}\,l\right] \quad , \quad \ldots, \quad \ldots. \end{aligned}\right.$$

Dans le déterminant (21) nous pouvons remplacer $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$, et les autres éléments de la première colonne, par :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(M\frac{\partial X}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(N\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

et les quantités analogues, sous la condition que (M — N) ne soit pas identiquement nul ; nous prendrons :

$$M = \frac{S^2}{S+T} \qquad \text{et } N = \frac{S^2}{S+T'},$$

de sorte que, en tenant compte de (18), de (19), et de (22),

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(M\frac{\partial X}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(N\frac{\partial X}{\partial v}\right) = \frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} -$$

$$- \frac{1}{S+T}\frac{\partial S}{\partial u}\cdot T'\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{S+T'}\cdot\frac{\partial S}{\partial v}\cdot T\frac{\partial x}{\partial u} - \Delta l.$$

Nous avons dès lors à exprimer que :

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{S+T+T'}{S+T} + \frac{\partial S}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\frac{S+T+T'}{S+T} - \Delta l & . & . \\ S\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{S+T}\frac{\partial S}{\partial u}\,l & . & . \\ S\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{S+T'}\frac{\partial S}{\partial v}\,l & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la seconde ligne par $-\frac{S+T+T'}{S(S+T')}\frac{\partial S}{\partial v}$, la troisième par $\frac{S+T+T'}{S(S+T)}\frac{\partial S}{\partial u}$ et ajoutons à la première, et nous obtenons, après simplification :

$$-\Delta . S^2 . \begin{vmatrix} l & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Or le dernier déterminant n'est pas nul, S non plus, donc cette condition équivaut bien à $\Delta = 0$, comme nous l'avions annoncé.

On peut donc définir un système cyclique comme une congruence de cercles normaux à ∞^1 surfaces.

Transformation de contact de Ribaucour

Considérons une sphère fixe de centre ω, et les ∞^4 cercles (H) orthogonaux à cette sphère ; considérons, d'autre part, une surface (S), un de ses points M, et l'élément de contact en ce point ; il y a un cercle (H) et un seul passant par M et normal en ce point à la surface (S). Donc à la surface (S) correspond une congruence de cercles (H) qui lui sont orthogonaux ; de plus ces cercles étant orthogonaux à la sphère (ω) en deux points sont orthogonaux à trois surfaces ; ils constituent donc un système cyclique. Soient P, P′ les points où le cercle (H) rencontre la sphère ; déterminons sur ce cercle le point M′ tel que le rapport anharmonique (M, M′, P, P′) soit égal à une constante donnée C. Le lieu du point M′ est une surface normale à (H), puisque l'équation (5) a mêmes propriétés que l'équation de Riccati à une seule variable. A l'élément de contact de la surface (S) au point (M) correspond ainsi pour chaque valeur de C, un élément de contact d'une autre surface ; les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces, et nous avons ainsi un groupe de ∞^1 transformations de contact conservant les lignes de courbure.

Ces résultats subsistent évidemment si on prend les cercles (H) normaux à un plan fixe.

Surfaces de Weingarten

8. — Nous avons considéré des congruences de sphères telles que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes focales. Aux sphères, la transformation de S. Lie fait correspondre des droites, et aux lignes de courbure correspondent les lignes asymptotiques. Il est donc naturel de considérer aussi des congruences de droites telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales. Nous nous bornerons au cas où la congruence est une congruence de normales, et le problème revient ainsi à chercher les surfaces telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée.

Soit donc une surface (Σ) sur laquelle nous prendrons les lignes de courbure pour lignes coordonnées ; soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale, R, R′ les rayons de courbure principaux. Les deux nappes de la développée sont définies par les équations :

$$\text{(S)} \qquad X = x + Rl, \qquad Y = y + Rm, \qquad Z = z + Rn;$$
$$\text{(S')} \qquad X' = x + R'l, \qquad Y' = y + R'm, \qquad Z' = z + R'n.$$

Cherchons les asymptotiques de (S), (S'); et exprimons que les équations différentielles en u, v qui les définissent sont les mêmes. Ici les lignes coordonnées formant un réseau orthogonal et conjugué :

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2,$$
$$\Sigma l d^2 x = \mathrm{L}du^2 + \mathrm{N}dv^2;$$

et [Ch. III, § 10 et Ch. IV, § 2] :

$$\frac{1}{R} = \frac{L}{E}, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{N}{G},$$

d'où :

$$\Sigma l d^2 x = \frac{E}{R} du^2 + \frac{G}{R'} dv^2.$$

Les formules d'O. Rodrigues donnent :

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial m}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial n}{\partial u} = -\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial u};$$

et :

$$\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{1}{R'}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial n}{\partial v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial v};$$

et par conséquent :

$$dX = dx + Rdl + ldR = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv -$$
$$- R\left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{1}{R'} \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) + ldR,$$

ou :

$$(1) \qquad dX = \left(1 - \frac{R}{R'}\right)\frac{\partial x}{\partial v} dv + ldR.$$

Cette formule et les analogues montrent, comme on devait le prévoir, que la normale à (S) a pour coefficients de direction :

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}.$$

On conclut, de plus, que, pour cette surface (S) :

$$(2) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{R}{R'}\right)^2 \mathrm{G}dv^2 + dR^2,$$

ce qui met en évidence sur la surface (S) une famille de géodésiques

$v = c^{te}$, et leurs trajectoires orthogonales $R = c^{te}$ [Cf. Ch. III, § 9, Ch. VII, § 2 et Ch. XIII, § 2].

L'équation différentielle des asymptotiques est :

$$\Sigma dl . dX = 0,$$

ou :

$$\Sigma . d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) . dX = 0.$$

Développons cette équation en nous servant des formules (1). Le coefficient de $\left(1 - \frac{R}{R'}\right) . dv$ est :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = du . \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + dv . \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v};$$

Or :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \, \frac{\partial x}{\partial v} = 0 ;$$

d'ou :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = - \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = - \frac{1}{2} . \frac{\partial E}{\partial v},$$

et :

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} . \frac{\partial G}{\partial u} .$$

Le coefficient de dR est, d'autre part :

$$\Sigma l d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} . du + \Sigma l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} . dv = \frac{E}{R} du,$$

d'où l'équation aux asymptotiques :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{R'}\right)\left[- \frac{\partial E}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2\right] + \frac{E}{R} dR du = 0. \tag{3}$$

Les courbes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ correspondent à des courbes conjuguées sur la surface (S) d'après les propriétés générales des développables des congruences (Ch. VI, § 2); donc le coefficient de $dudv$ dans l'équation précédente est nul :

$$- \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{R'}\right) \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{E}{R} \frac{\partial R}{\partial v} = 0 ; \tag{4}$$

et l'équation (3) devient :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{R'}\right) \frac{\partial G}{\partial u} dv^2 + \frac{E}{R} \frac{\partial R}{\partial u} du^2 = 0.$$

De même sur la surface (S') on obtiendra la condition :

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{R'}{R}\right)\cdot\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{G}{R'}\frac{\partial R'}{\partial u}=0, \tag{5}$$

de sorte que l'équation aux asymptotiques de (S) peut s'écrire :

$$-\frac{G}{R'^2}\frac{\partial R'}{\partial u}dv^2+\frac{E}{R^2}\frac{\partial R}{\partial u}du^2=0,$$

ou :

$$G\frac{\partial\left(\frac{1}{R'}\right)}{\partial u}dv^2-E\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial u}du^2=0. \tag{6}$$

De même l'équation différentielle des asymptotiques de (S') est :

$$E\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial v}du^2-G\frac{\partial\left(\frac{1}{R'}\right)}{\partial v}dv^2=0. \tag{7}$$

Pour que ces équations soient identiques, il faut et il suffit que :

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial v} & \frac{\partial\left(\frac{1}{R'}\right)}{\partial v}\\ \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial v} & \frac{\partial\left(\frac{1}{R'}\right)}{\partial v}\end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{R}$ soit fonction de $\frac{1}{R'}$. *Les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre (Ribaucour).* Les surfaces qui satisfont à cette condition s'appellent *surfaces de Weingarten, ou surfaces W.* Les surfaces minima en sont un cas particulier ($R+R'=0$).

Supposons que nous partions dans les calculs précédents d'une surface (W) comme surface (Σ) : R' est fonction de R, et la condition (5) montre que :

$$\frac{\partial \log G}{\partial u}=\Psi(R)\frac{\partial R}{\partial u},$$

d'où :

$$\log G=\chi(R)+\theta(v),$$

$$G=e^{\chi(R)}e^{\theta(v)}=F(R)K(v).$$

La formule (2) donnant le ds^2 de la développée s'écrit donc sous la forme :

$$ds^2=\Theta^2(R)K(v)dv^2+dR^2.$$

Posons :

$$\sqrt{K(v)}dv = dV,$$

et elle devient :

$$dS^2 = dR^2 + \Theta^2(R)dV^2, \tag{8}$$

forme caractéristique de l'élément d'arc des surfaces de révolution rapportées aux méridiens et aux parallèles. Si nous rapportons la méridienne à son arc σ, ses équations sont :

$$x = \Theta(\sigma), \qquad y = 0, \qquad z = \Theta_1(\sigma) ;$$

et celles de la surface de révolution sont :

$$x = \Theta(\sigma)\cos V, \qquad y = \Theta(\sigma)\sin V, \qquad z = \Theta_1(\sigma),$$

d'où on déduit pour le ds^2 de la surface, à cause de $\Theta'^2 + \Theta_1'^2 = 1$,

$$ds^2 = d\sigma^2 + \Theta^2(\sigma)dV^2.$$

C'est, en faisant $\sigma = R$, la formule (8).

On voit ainsi que les *développées de toute surface* (W) *sont applicables sur des surfaces de révolution, les méridiens correspondant à une famille de géodésiques et les parallèles à leurs trajectoires orthogonales.*

Application. — Supposons la surface (W) à courbure totale constante négative (Ch. IV, § 6). En changeant d'unité on peut toujours supposer que cette courbure totale est égale à -1. On aura donc :

$$RR' = -1,$$

ou :

$$R' = -\frac{1}{R}.$$

La condition (5) s'écrit alors :

$$\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{2G}{R}\frac{\partial R}{\partial u},$$

ou :

$$\frac{\partial \log G}{\partial u} = -\frac{2R}{R^2+1}\frac{\partial R}{\partial u} = -\frac{\partial \log(R^2+1)}{\partial u}.$$

On conclut de là :

$$G = \frac{1}{R^2+1}K(v),$$

et en posant encore $dV = \sqrt{K(v)}dv$, on tire de la formule (2) :

$$ds^2 = (R^2+1).dV^2 + dR^2.$$

Posons donc :

$$\Theta(R) = \sqrt{R^2 + 1},$$

et la méridienne de la surface de révolution est, d'après le calcul ci-dessus, telle que l'on ait :

$$x = \sqrt{\sigma^2 + 1},$$

d'où :

$$\sigma = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Cherchons z. Il suffit d'écrire :

$$dx^2 + dz^2 = d\sigma^2 = dx^2 . \frac{x^2}{x^2 - 1},$$

et on en conclut :

$$dz^2 = \frac{dx^2}{x^2 - 1},$$

ou :

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Donc :

$$z = L(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

et :

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = e^z ;$$

d'où :

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = e^{-z}.$$

Donc enfin, pour la méridienne cherchée, nous obtenons la chaînette :

$$x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \operatorname{ch} z.$$

La chaînette :

$$x = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$$

correspondrait de même à une courbure totale constante égale à $(-a^2)$. Ainsi *les deux nappes de la développée d'une surface à courbure totale constante négative sont applicables sur une alysséide*, c'est-à-dire sur la surface engendrée par une chaînette qui tourne autour de sa base.

EXERCICES

CHAPITRE PREMIER

1. — Trouver l'axe instantané de rotation et de glissement du trièdre de Serret. On constatera qu'il rencontre la normale principale au point central de la surface réglée engendrée par cette normale principale [Ch. V, § 8, p. 105].

2. — Trouver les hélices circulaires osculatrices à une courbe gauche en un de ses points. Déterminer celle de ces hélices qui a même torsion que la courbe donnée.

3. — Déterminer les éléments fondamentaux (arc, courbure, torsion) du lieu des centres de la sphère osculatrice à une courbe gauche. Conclure de cette étude que, pour qu'une courbe soit une courbe sphérique, il faut et il suffit que le rayon de la sphère osculatrice soit constant. [Cf. Ch. V, § 10, p. 117].

5. — (1°). Montrer que, pour que les normales principales à une courbe (C) soient aussi les normales principales d'une seconde courbe (C′), il faut et il suffit que les rayons de courbure et de torsion de (C) satisfassent à une identité de la forme :

$$\text{(1)} \qquad \frac{h}{R}+\frac{k}{T}=1 \qquad (h=\text{const.}, \quad k=\text{const.}).$$

Relation qui en résulte pour (C′). Cas où les plans osculateurs à (C) et (C′), aux points situés sur la normale principale commune, sont rectangulaires.

(2). Montrer que, si on se donne la relation (1), et la courbe sphérique (γ) décrite par le point de coordonnées :

$$\xi=\alpha\cos\theta+\alpha''\sin\theta, \qquad \eta=\beta\cos\theta+\beta''\sin\theta, \qquad \zeta=\gamma\cos\theta+\gamma''\sin\theta;$$
$$(h=m\cos\theta, \qquad k=m\sin\theta),$$

les formules de Serret fournissent :

$$\alpha, \beta, \gamma; \qquad \alpha', \beta', \gamma'; \qquad \alpha'', \beta'', \gamma''; \quad \frac{ds}{d\sigma}.$$

en fonction de l'arc σ de (γ) ; et conduisent, pour la courbe (C), aux équations :

$$(2) \qquad x = h\int \xi d\sigma - k\int (\eta d\zeta - \zeta d\eta), \qquad y = ..., \qquad z = ...$$

(3). Vérifier que les formules (2) donnent, pour toute courbe sphérique (γ), une courbe (C) satisfaisant à l'équation (1). [De telles courbes s'appellent *courbes de Bertrand*]. Examiner les cas particuliers :

$$R = h, \qquad T = k,$$

qui fournissent les *courbes à courbure constante*, et les *courbes à torsion constante*.

6. — Déterminer une courbe (C), connaissant, en fonction de l'arc s, les expressions du rayon de courbure R et du rayon de torsion T. On se servira des formules de Serret :

$$dx = \alpha ds, \qquad d\alpha = \frac{\alpha'}{R} ds, \qquad d\alpha'' = \frac{\alpha'}{T} ds, \qquad d\alpha' = -\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right) ds,$$

en suivant la marche suivante :

(1°). Considérant α, α', α'' comme coordonnées d'un point de la sphère (Σ), de centre O, et de rayon 1, on prendra pour inconnues les paramètres des génératrices rectilignes de (Σ), en posant [Cf. Ch. IV, § 6]:

$$1 + \alpha' = -u(\alpha + i\alpha''), \qquad \alpha - i\alpha'' = v(1 + \alpha'),$$

et on trouvera que u, v sont deux solutions de l'*équation de Riccati* [Ch. V, § 10, p. 111]

$$dW = (MW^2 + M_0)ds, \qquad \left[M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{i}{T}\right), \qquad M_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{i}{T}\right)\right].$$

(2°). Soient :

$$u = \frac{Au_0 + B}{Cu_0 + D}, \qquad v = \frac{Av_0 + B}{Cv_0 + D} \qquad (u_0 = \text{const.}, \quad v_0 = \text{const.})$$

deux solutions quelconques de cette équation de Riccati. Montrer que les points $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' ; $\gamma, \gamma', \gamma''$, qui correspondent aux valeurs :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = -1; \qquad u_0 = i, \quad v_0 = -i; \qquad u_0 = 0, \quad v_0 = \infty$$

fournissent une solution du problème ; et indiquer comment s'en déduit la solution la plus générale. — Conclure de là qu'il y a une infinité de courbes (C) répondant à la question, et que ce sont toutes les courbes superposables à l'une quelconque d'entre elles.

(3°). Qu'arrive-t-il si le rapport $\frac{R}{T}$ est constant? Achever le calcul en supposant R et T constants.

(4°). *Remarque.* — En considérant α, α', α'' comme cosinus directeurs d'une direction donnée par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires, tout changement de coordonnées, ou, ce qui revient au même, toute rotation autour de l'origine, se traduit par une même transformation projective effectuée sur u et v. Le point à l'infini, dans la direction considérée, subit ainsi, dans le plan de l'infini, la transformation projective la plus générale qui laisse invariant le cercle imaginaire de l'infini.

CHAPITRE II

7. — On considère la surface S lieu des sections circulaires diamétrales d'une famille d'ellipsoïdes homofocaux. Déterminer sur S les trajectoires orthogonales des sections circulaires qui l'engendrent.

8. — Déterminer toutes les représentations conformes d'une sphère sur un plan. Trouver celles qui donnent des systèmes connus de projections cartographiques (projection stéréographique, projection de Mercator).

9. — Les courbes coordonnées d'une surface S étant rectangulaires, soient MU et MV leurs tangentes, et soit φ_0 l'angle (MU, MT). Dans la formule (9) [page 34],

$$\frac{\sin\theta}{R} - \frac{d\varphi}{ds} = r_1\frac{du}{ds} + r_2\frac{dv}{ds},$$

calculer les expressions de r_1 et r_2. Généraliser, en supposant les coordonnées u et v quelconques.

10. — Établir les formules fondamentales qui donnent $\frac{\cos\theta}{R}$, $\frac{\sin\theta}{R}$

en déduisant les premiers termes des développements en série [Ch. I, § 5, p. 7] des coordonnées d'un point de la courbe, rapportée au trièdre M.TPB [§ 4, p. 27], des développements en série (déduits de $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$) des coordonnées d'un point de la courbe, rapportée au trièdre M.TN'N [§ 4, p. 28]. — Il suffit de calculer les termes jusqu'au second degré en ds.

11. — Une surface (S) est supposée définie comme l'enveloppe d'une famille de surfaces (Σ_{uv}), données par une équation de la forme $F(x, y, z\,;\, u, v) = 0$; de sorte que u, v sont, sur (S) les coordonnées curvilignes d'un point courant M. A toute courbe (C), tracée sur (S), correspond ainsi une famille de ∞^1 surfaces (Σ_{uv}), dont chacune coupe la surface infiniment voisine suivant une caractéristique : soit (K) celle de ces caractéristiques qui passe par le point M de (C). Montrer qu'il y a réciprocité entre la direction des tangentes à (C) et à (K) en M. — Cas où les surfaces (Σ_{uv}) sont des plans.

CHAPITRE III

12. — On considère la surface :

$$x = \frac{c^2-b^2}{bc} \cdot \frac{uv}{u-v}, \quad y = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b} \cdot \frac{v\sqrt{b^2-u^2}}{u+v}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c} \cdot \frac{u\sqrt{v^2-c^2}}{u+v}\,;$$

déterminer ses lignes de courbure, et calculer les rayons de courbure principaux.

13. — Montrer que les surfaces :

$$e^{m(z-z_0)} = \cos m(x - x_0) . \cos m(y - y_0)$$

sont les surfaces de translation, ayant pour leurs deux familles de génératrices des courbes planes situées dans des plans rectangulaires (parallèles à zOx et zOy), et telles que les génératrices planes qui passent en un point quelconque de la surface y soient tangentes aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice. — Lignes de courbure de ces surfaces.

14. — On considère la surface :

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - u^2)f(u)du + \frac{1}{2}\int (1 - v^2)\varphi(v)dv,$$

$$y = \frac{i}{2}\int (1 + u^2)f(u)du - \frac{i}{2}\int (1 + v^2)\varphi(v)dv,$$

$$z = \int uf(u)du + \int v\varphi(v)dv.$$

Calculer les rayons de courbures principaux et les coordonnées des centres de courbures principaux. Former l'équation différentielle des lignes de courbure et des lignes asymptotiques. Etudier les lignes de courbure en prenant :

$$f(u) = \frac{2m^2}{(m^2 + u^2)^2}, \qquad \varphi(v) = \frac{2m^2}{(m^2 + v^2)^2},$$

et en introduisant de nouvelles coordonnées par les formules :

$$u = m \operatorname{tg} \frac{\lambda + i\mu}{2}, \qquad v = m \operatorname{tg} \frac{\lambda - i\mu}{2}.$$

15. — Soient, en coordonnées rectangulaires, les équations :

$$x = \frac{1}{2} e^u \cos(v - \alpha) + \frac{1}{2} e^{-u} \cos(v + \alpha),$$

$$y = \frac{1}{2} e^u \sin(v - \alpha) + \frac{1}{2} e^{-u} \sin(v + \alpha),$$

$$z = u \cos\alpha + v \sin\alpha.$$

1° Pour chaque valeur de α, ces formules définissent une surface S_α. Indiquer un mode de génération de cette surface. Que sont en particulier S_0 et $S_{\frac{\pi}{2}}$?

2° On considère deux de ces surfaces S_α et S_β, et on les fait correspondre point par point de manière que les plans tangents aux points correspondants soient parallèles. Démontrer que les tangentes à deux courbes correspondantes, menées en deux points homologues, font un angle constant.

3° Chercher les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S_α et trouver une propriété géométrique des courbes auxquelles elles correspondent sur S_0, dans la transformation précédente. Qu'arrive-t-il pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

16. — Etudier les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont situées sur des sphères concentriques. Que peut-on dire des lignes de courbure de l'autre système?

17. — (1°). Si les courbes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sur une surface (S) sont les lignes asymptotiques de cette surface, et si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale à (S), en un point quelconque de (S), montrer qu'il existe une fonction θ telle que l'on ait :

$$dx = \theta\left[\mu\left(\frac{\partial\nu}{\partial u}du - \frac{\partial\nu}{\partial v}dv\right) - \nu\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}du - \frac{\partial\mu}{\partial v}dv\right)\right],$$

$$dy = \theta\left[\nu\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}du - \frac{\partial\lambda}{\partial v}dv\right) - \lambda\left(\frac{\partial\nu}{\partial u}du - \frac{\partial\nu}{\partial v}dv\right)\right],$$

$$dz = \theta\left[\lambda\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}du - \frac{\partial\mu}{\partial v}dv\right) - \mu\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}du - \frac{\partial\lambda}{\partial v}dv\right)\right].$$

(2°). Trouver, en partant de ces formules, le ds^2 de la surface, l'équation des lignes de courbure, l'équation aux rayons de courbure principaux. Calculer la torsion des lignes asymptotiques, et montrer qu'elle s'exprime au moyen des rayons de courbure principaux seulement.

(3°). Si on pose :

$$l = \lambda\sqrt{\theta}, \qquad m = \mu\sqrt{\theta}, \qquad n = \nu\sqrt{\theta},$$

on obtient les *formules de Lelieuvre*. Montrer que l, m, n sont trois solutions particulières d'une même équation aux dérivées partielles de la forme $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} = K\omega$.

CHAPITRE IV

18. — Etablir les conditions d'intégrabilité qui lient les invariants fondamentaux, en supposant la surface rapportée à ses lignes de courbure.

19. — Même question, en supposant la surface rapportée à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales. Exprimer, en fonction de la quantité H, la courbure totale, et la forme différen-

tielle $\frac{ds}{R_g} - d\varphi_0$ [Ch. II, p. 34; ch. III, p. 56] et retrouver ainsi la formule d'Ossian Bonnet [Ch. IV, p. 75]

20. — En supposant les coordonnées quelconques, trouver celle des conditions d'intégrabilité qui donne l'expression de la courbure totale.

21. — Discuter la forme de la méridienne des surfaces à courbure totale constante, soit positive, soit négative.

22. — (1°). Les équations de la pseudosphère étant (p. 81) :

$$x = R\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = R\cos\theta\sin\varphi,$$

$$z = R\left[\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin\theta\right], \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right),$$

on obtient une représentation conforme de la surface sur un demi-plan en posant :

$$X = m\varphi, \qquad Y = \frac{m}{\cos\theta} \qquad (m = \text{constante positive, donc } Y > 0).$$

En posant, d'autre part :

$$u = X + iY, \qquad v = X - iY,$$

on ramène le ds^2 à la forme type :

$$ds^2 = -4l^2 \frac{du dv}{(u-v)^2}.$$

(2°). En se servant des coordonnées u, v, trouver toutes les transformations des points de la surface qui conservent les longueurs d'arc. Si on les interprète dans le plan (X, Y), on trouvera qu'elles laissent l'axe des X invariant, et qu'elles changent tout cercle en cercle.

(3°). Dans cette même représentation conforme, les lignes géodésiques de la pseudosphère sont représentées par les demi-cercles qui ont leurs centres sur l'axe des X, et sont situés dans le demi-plan, limité par cet axe, qui s'étend du côté des Y positifs.

(4°). Au facteur l près, la distance de deux points est $\log(M_1M_2A_1A_2)$, en désignant par M_1, M_2 les homologues des points dans le plan (XY) et par A_1A_2 les points où l'axe des X est coupé par le cercle, image de la géodésique qui joint les deux points. — Les points de l'axe des X jouent le rôle de points à l'infini. — Deux couples de points dont la

distance est la même, peuvent être amenés en coïncidence par un des déplacements de la surface sur elle-même défini par les transformations trouvées.

CHAPITRE V

23. — Trouver les points de contact des plans isotropes menés par une génératrice quelconque d'une surface réglée. Quelles relations ont-ils avec le point central et le paramètre de distribution ?

24. — Trouver les surfaces réglées dont les lignes asymptotiques interceptent sur les génératrices des segments égaux.

25. — Trouver les surfaces réglées dont les lignes de courbure interceptent sur les génératrices des segments égaux.

26. — Trouver les lignes de courbure et les lignes géodésiques de l'hélicoïde développable.

27. — Montrer que les lignes d'une surface (S) quelconque, pour lesquelles : $ds - R_g d\varphi_0 = 0$ [notations de l'exercice 9], sont caractérisées par cette propriété que, si l'on mène par chacun des points de l'une d'elles une tangente à la courbe $v =$ constante, la surface réglée ainsi obtenue a pour ligne de striction la courbe considérée.

28. — Etant donnée une surface (S) et une courbe (C) de cette surface, on considère la surface réglée (G) engendrée par les normales MN menées à (S) aux divers points M de (C). Le point central de MN s'appelle le *métacentre* de (S), correspondant au point (M) et à la tangente MT de (C).

(1°) Déterminer ce métacentre, le plan asymptote, le paramètre de distribution. Discuter la variation du métacentre quand la courbe (C) varie, en passant toujours en M.

(2°) Montrer que le métacentre est le centre de courbure de la section droite du cylindre circonscrit à (S) et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan asymptote de G.

(3°) On suppose qu'on ait plusieurs surfaces (S), et que l'on affecte chacune d'elles d'un coefficient numérique a. On considère comme homologues sur ces diverses surfaces les points M (pris un sur chaque surface) pour lesquels les plans tangents à ces diverses surfaces sont parallèles ; soit M_0 le centre des distances proportionnelles d'un tel système de points M homologues, et relatif au système des

coefficients a. Soit (S_0) la surface lieu des points M_0. Montrer qu'elle correspond à chacune des surfaces (S) par plans tangents parallèles ; et que si I_0 est le métacentre de (S_0) correspondant aux divers métacentres I des surfaces (S) qui se trouvent associés dans la correspondance considérée, on a :

$$(\Sigma a).M_0I_0 = \Sigma(a.MI).$$

29. — On donne une courbe gauche (R), arête de rebroussement d'une développable (Δ). Déterminer toutes les surfaces réglées satisfaisant aux conditions suivantes : chacune des génératrices (G) d'une telle surface est perpendiculaire à un plan tangent (P) de (Δ), et le point de rencontre de (G) et de (P) est le point central de (G). Soit alors (Σ) l'une de ces surfaces réglées, chacun des plans isotropes passant par une de ses génératrices enveloppe une développable. Montrer que le lieu des milieux des segments dont les extrémités décrivent, indépendamment l'un de l'autre, les arêtes de rebroussement de ces deux développables est une surface minima inscrite dans (Δ).

30. — (1°) Former l'équation aux rayons de courbure principaux d'une surface réglée gauche (S), avec les expressions du ds^2 et de la forme Ψ employées dans le § 11 du chapitre V.

(2°). On en déduit la relation :

$$KM = [\varphi(v) - P'T]\sqrt{KT} - K'T\sqrt{1 - KT},$$

où :

$$M = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad T = \frac{1}{\sqrt{-R_1R_2}}.$$

En conclure que si les rayons de courbure principaux R_1, R_2 sont fonctions l'un de l'autre [Cf. Ch. XIII, § 8], P', K, et $\varphi(v)$ sont des constantes.

(3°). Montrer que, s'il en est ainsi, la surface (S) est un hélicoïde réglé, ou une surface gauche de révolution.

CHAPITRE VI

31. — On considère la congruence des tangentes communes aux deux surfaces :

$$x^2 + y^2 = 2az, \qquad x^2 + y^2 = -2az.$$

Déterminer les développables de cette congruence : étudier leurs arêtes de rebroussement, leurs courbes de contact, leur traces sur le plan $z = 0$.

32. — Si les deux multiplicités focales d'une congruence sont des développables isotropes (congruence isotrope), toutes les surfaces réglées qui passent par une même droite de la congruence ont même point central et même paramètre de distribution. Le plan perpendiculaire à chaque droite de la congruence mené à égale distance des deux points focaux enveloppe une surface minima. On peut obtenir ainsi la surface minima la plus générale.

33. — On suppose que les rayons (D) et (D′) de deux congruences se correspondent de manière que deux rayons correspondants soient parallèles. Si alors les développables des deux congruences se correspondent, les plans focaux de (D) sont parallèles à ceux de (D′); les droites (Δ), (Δ'), qui joignent les points focaux correspondants se coupent en un point M ; le lieu de ce point admet (Δ) et (Δ') pour tangentes conjuguées, et les courbes conjuguées enveloppées par ces droites correspondent aux développables des deux congruences.

CHAPITRE VII

34. — Etudier les congruences formées de droites tangentes à une sphère et normales à une même surface ; étudier les surfaces normales aux droites d'une telle congruence, et leurs lignes de courbure.

35. — Etudier la congruence formée des droites normales à une surface dont une famille de lignes de courbure est située sur des sphères concentriques.

36. — Montrer que les surfaces moulures, dans le cas où l'une des nappes de la développée est un cylindre ou un cône, peuvent être définies par le mouvement d'un profil plan, de forme invariable, dont le plan reste constamment normal à un cylindre ou à un cône. Préciser le mouvement de ce profil. Chercher si l'on peut dire quelque chose d'analogue pour les surfaces moulures générales.

37. — Montrer que les droites tangentes à deux quadriques homofocales constituent une congruence de normales. Si on fait réfléchir toutes ces droites, considérées comme des rayons lumineux, sur une

autre quadrique homofocale aux deux premières, quelles seront les multiplicités focales de cette seconde congruence?

38. — Etant données deux surfaces homofocales du second degré et un plan (P), si on mène par les droites (d') du plan (P) des plans tangents aux deux surfaces, les droites (d) qui joignent les points de contact correspondants sont normales à une famille de surfaces parallèles. Soit (δ) la droite qui contient les pôles du plan (P) par rapport aux deux quadriques homofocales, et (d') la droite du plan (P) qui correspond à une droite (d) de la congruence de normales considérée. Le plan mené par (δ) perpendiculairement à (d') coupe (d) en un point m. Le lieu du point m est l'une des surfaces cherchées : c'est une cyclide. Les développables de la congruence découpent sur les surfaces homofocales des réseaux conjugués.

39. — On considère la congruence des droites de l'espace sur lesquelles trois plans formant un trièdre trirectangle déterminent des segments invariables. Démontrer que c'est une congruence de normales et déterminer les surfaces normales aux droités de la congruence. Déterminer les points focaux sur une quelconque de ces droites. Déterminer les cônes directeurs des développables de la congruence.

40. — Démontrer qu'il existe des congruences (isogonales) telles que les plans focaux forment un dièdre constant. Quelle est la propriété des arêtes de rebroussement des développables de la congruence par rapport aux nappes de la surface focale qui les contiennent ? Chercher l'équation différentielle de ces courbes sur la surface focale supposée donnée. Que peut-on dire du cas où l'une des nappes de la multiplicité focale est une développable, une courbe, une sphère?

41. — Si on considère une famille de sphères dont le lieu des centres ω est une courbe plane (C), et dont les rayons sont proportionnels aux distances des centres ω à une droite fixe (Δ) du plan de la courbe (C), démontrer que l'enveloppe de ces sphères a toutes ses lignes de courbure planes. Que peut-on dire des plans de ces lignes de courbure? — Réciproquement, comment peut-on obtenir toutes les surfaces canaux dont toutes les lignes de courbure sont planes?

CHAPITRE VIII

42. — On donne deux courbes (C), (C_1). Trouver toutes les surfaces (S) sur lesquelles les courbes de contact des cônes circonscrits à (S), ayant leurs sommets sur (C) et (C_1), forment un réseau conjugué. En définissant (C) et (C_1) par les équations :

$$x = f(\lambda), \qquad y = g(\lambda), \qquad z = h(\lambda), \qquad t = k(\lambda);$$
$$x = \varphi(\mu), \qquad y = \psi(\mu), \qquad z = \chi(\mu), \qquad t = \theta(\mu),$$

la surface la plus générale répondant à la question est définie par les équations :

$$\begin{aligned} x &= \int A(\lambda) f(\lambda) d\lambda + \int B(\mu)\varphi(\mu) d\mu, \\ y &= \int A(\lambda) g(\lambda) d\lambda + \int B(\mu)\psi(\mu) d\mu, \\ z &= \int A(\lambda) h(\lambda) d\lambda + \int B(\mu)\chi(\mu) d\mu, \\ t &= \int A(\lambda) k(\lambda) d\lambda + \int B(\mu)\theta(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Interpréter géométriquement les formules obtenues de façon à trouver une définition géométrique de ces surfaces. Transformer par dualité les divers résultats obtenus.

43. — Soit (Σ) la sphère de centre O et de rayon égal à un ; soit (S) une surface quelconque et (S′) sa polaire réciproque par rapport à (Σ). Soit M un point quelconque de (S) et (P) le plan tangent en ce point ; soient M′ et (P′) le point et le plan tangent de (S′) qui correspondent à (P) et M par polaires réciproques. On considère la congruence (K) des droites MM′ et la congruence (K′) des intersections des plans (P) et (P′). Montrer que leurs développables se correspondent, et que les développables de (K) découpent sur (S) et (S′) des réseaux conjugués. Comment les développables de (K) coupent-elles (Σ) ? — Chercher à déterminer (S) de manière que (K) soit une congruence de normales ; que peut-on dire alors des développables de (K) et de la surfaco (S) ?

44. — Etant donnée une courbe gauche (C), par un point fixe O on mène des segments OM équipollents aux diverses cordes de (C). Le lieu des points M est une surface (S_0). Par chaque point M de cette surface on mène la parallèle (Δ) à l'intersection des plans osculateurs de (C) menés aux points P et P_1 de (C) tels que PP_1 soit équipollent

à OM. Soient (S_1) et (S_2) les deux nappes de la surface focale de la congruence des droites (Δ) :

(1°) déterminer (S_1) et (S_2), leur ds^2, leur $\Sigma l d^2 x$. Montrer que les asymptotiques se correspondent sur (S_1) et (S_2). Quelles sont les courbes de (S_0) qui leur correspondent? —

(2°) Condition nécessaire et suffisante que doit remplir (C) pour que la congruence des droites (Δ) soit une congruence de normales. Trouver alors l'une des surfaces normales. Montrer que les rayons de courbure de (Σ) sont fonctions l'un de l'autre.

(3°) En restant dans ce cas, rapporter le ds^2 de (S_1) aux géodésiques tangentes aux droites (Δ) et à leurs trajectoires orthogonales. En conclure que (S_1) est applicable sur un paraboloïde de révolution.

Nota. — Les deux dernières parties de cet exercice se rattachent à la fin du chapitre XIII.

CHAPITRE IX

45. — On considère deux plans rectangulaires, et toutes les droites telles que le segment intercepté sur chacune d'elles par les plans précédents ait une longueur constante. Trouver les congruences de normales du complexe de ces droites.

46. — On considère trois plans formant un trièdre trirectangle et les droites telles que le rapport des segments déterminés par ces trois plans sur chacune d'elles soit constant. Trouver les surfaces dont les normales appartiennent au complexe de ces droites. Il y a parmi ces surfaces une infinité de surfaces du second ordre admettant les trois plans donnés comme plans de symétrie. Le complexe précédent est celui des normales à une famille de quadriques homofocales, ou à une famille de quadriques homothétiques par rapport à leur centre (*complexe de Chasles*).

CHAPITRE X

47. — Etudier les asymptotiques des surfaces réglées du troisième ordre. Montrer que dans le cas général ce sont des unicursales du quatrième ordre, et que chaque génératrice rencontre une asympto-

tique en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points où la génératrice s'appuie sur la droite double et sur la droite singulière.

Examiner le cas où la surface est une surface de Cayley à directrice unique.

N. B. — L'équation d'une surface réglée gauche peut se ramener, comme l'on sait, par un choix convenable du tétraèdre de référence, à la forme

$$x^2z - y^2t = 0 \text{ (surface réglée générale)},$$

ou

$$x^3 + 2xyz - y^2t = 0 \text{ (surface de Cayley)}.$$

48. — Déterminer les asymptotiques de la *surface de Steiner*. Par quelles courbes sont-elles représentées dans la représentation paramétrique de la surface?

N. B. — On sait que les équations d'une surface de Steiner sont de la forme :

$$x = \frac{f(u, v)}{k(u, v)}, \qquad y = \frac{g(u, v)}{k(u, v)}, \qquad z = \frac{h(u, v)}{k(u, v)},$$

f, g, h, k étant quatre polynômes du second degré quelconques. En excluant les cas particuliers, on peut, par une transformation projective, et un choix convenable des paramètres, les ramener à la forme :

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 2}, \qquad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 2}, \qquad z = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 2}.$$

Toute section de la surface par un plan tangent se décompose en deux coniques. En interprétant u, v comme des coordonnées rectangulaires dans un plan, les formules précédentes réalisent la représentation de la surface sur un plan.

49. — Déterminer la surface canal la plus générale dont toutes les lignes de courbure soient sphériques ; montrer que ces lignes de courbure se déterminent sans intégration.

50. — Que peut-on dire de la détermination des lignes de courbure d'une surface canal, enveloppe de ∞^1 sphères coupant une sphère fixe sous un angle constant?

51. — Déterminer les surfaces réglées d'un complexe linéaire qui admettent pour ligne asymptotique une courbe donnée. Montrer que toutes leurs asymptotiques se déterminent sans intégration, et qu'elles sont algébriques si la courbe donnée est algébrique.

CHAPITRE XI

52. — Etudier la congruence des droites définies par les équations :

$$A\lambda + B\mu + C = 0, \qquad A_1\lambda + B_1\mu + C_1 = 0,$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont des fonctions linéaires des coordonnées et λ, μ des paramètres arbitraires. Discuter en particulier la question des droites passant par un point, des droites rencontrant une droite fixe, des droites situées dans un plan, des multiplicités focales.

53. — Démontrer les résultats énoncés à la fin du paragraphe 3 de ce chapitre.

54. — Démontrer par le calcul les propriétés de la transformation de Lie énoncées à la fin du paragraphe 4 de ce chapitre.

CHAPITRE XII

55. — On considère une famille de ∞^1 paraboloïdes (P) ayant mêmes plans principaux. Comment faut-il choisir ces paraboloïdes pour que la congruence des génératrices rectilignes d'un même système de tous ces paraboloïdes soit une congruence de normales ? Montrer qu'alors les paraboloïdes (P) constituent l'une des trois familles d'un système triple orthogonal et trouver les deux autres familles. Montrer qu'on peut choisir les paraboloïdes (P), plus particulièrement, de manière que l'une de ces autres familles soit encore formée de paraboloïdes ; et donner, dans ce cas, la signification géométrique des deux familles de paraboloïdes.

CHAPITRE XIII

56. — Soit (S) une surface quelconque et (Π) un plan quelconque. On considère toutes les sphères (U) ayant leurs centres sur (S) et cou

pant le plan (Π) sous un angle constant φ tel que l'on ait $\cos\varphi = \frac{1}{k}$. Soit (S′) la surface déduite de (S) en réduisant les ordonnées de (S) perpendiculaires à (Π) dans le rapport $\frac{\sqrt{1-k^2}}{1}$. Les sphères (U) enveloppent une surface à deux nappes. Montrer que leurs lignes de courbure correspondent point par point à celles de (S′). Examiner le cas où (S) est du second degré.

57. — De chaque point M d'une surface (S) comme centre, on décrit un cercle (K) situé dans le plan tangent à S, et dont le rayon soit égal à une constante donnée.

(1°) Déterminer les familles de ∞^1 cercles (K) qui engendrent une surface sur laquelle ces cercles soient lignes de courbure. Lieux des centres des sphères dont une telle surface est l'enveloppe.

(2°) Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (K) forment un système cyclique. Cette condition étant supposée remplie, soit (S_1), l'une des surfaces normales aux cercles (K); montrer que les lignes de courbure de (S_1) correspondent à celles de (S), quand on fait correspondre à chaque point M de (S) le point M_1, du cercle (K) correspondant, où (S_1) est normal à (K).

(3°) Montrer que (S_1) a une courbure totale constante, et que la congruence de droites qui a (S), (S_1) pour surfaces focales est une congruence de normales.

(4°) Soit C l'un des centres de courbure principaux de (S) en M, et C_1 le centre de courbure principal de (S_1) en M_1, qui correspond à C. Etudier la congruence des droites CC_1.

58. — Etant donnée une surface (S), on désigne par (C) l'une quelconque des lignes de courbure de l'une des familles, par (C′) l'une quelconque des lignes de courbure de l'autre famille, de sorte qu'en un point M de (S) se croisent une courbe (C) et une courbe (C′). Soient ω, ω' les centres de courbure principaux correspondant à ces deux courbes ; et soient G, G′ les centres de courbure géodésique de ces deux courbes.

(1°) Que peut-on dire des congruences définies respectivement par les quatre droites MG, MG′, $G\omega$, $G'\omega'$?

(2°) Soit (γ) le cercle osculateur à (C) en M. Démontrer que (γ) engendre une surface canal quand M décrit une courbe (C′). Trouver les sphères dont cette surface canal est l'enveloppe.

(3°) Montrer que si (S) fait partie de l'une des familles d'un système triple orthogonal, les cercles osculateurs aux trajectoires orthogonales

des surfaces de cette famille, construits aux divers points de (S), forment un système cyclique.

59. — Soit O un point fixe, et (S) une surface quelconque ; en un point quelconque de M de (S) on mène le plan tangent (P) ; et de O on abaisse la perpendiculaire sur (P) ; soit H son pied.

(1°) Trouver les courbes de (S) qui, en chacun de leurs points M, admettent MH pour normale.

(2°) Soit HI la médiane du triangle OHM ; la congruence des droites HI est une congruence de normales. Trouver les surfaces normales à toutes ces droites. Montrer que leurs lignes de courbure correspondent à un réseau de courbes conjuguées décrites par M sur (S).

(3°) Soit K le point où le plan perpendiculaire à MO rencontre MH ; et soit (γ) le cercle de centre K, passant en O, et situé dans le plan MOK. Les cercles (γ) forment un système cyclique.

60. — De chaque point M du paraboloïde

$$(P) \qquad xy - az = 0$$

comme centre, on décrit une sphère (Σ) tangente au plan xoy. Soit A le point de contact de (Σ) avec ce plan, et B le second point de contact de (Σ) avec son enveloppe.

(1°) Quelles courbes doit décrire M sur (P) pour que AB engendre une développable ? Ces courbes forment sur (P) un réseau conjugué, et leurs tangentes en chaque point M sont perpendiculaires aux plans focaux de la congruence engendrée par AB.

(2°) Déterminer les lignes de courbure de l'enveloppe de (Σ) ; les normales menées à cette enveloppe le long de chaque ligne de courbure découpent sur (P) un réseau conjugué.

(3°) On considère le cercle (C) normal à (Σ) en A et B. Montrer qu'il y a une infinité de surfaces normales à tous les cercles (C), et les déterminer.

(4°) Montrer que ces surfaces forment l'une des familles d'un système triple orthogonal, et achever de déterminer ce système.

ERRATA

Page 33, 2e ligne à partir du bas, lire $\frac{d\varphi_0}{ds}$, au lieu de $\frac{d\varphi}{ds}$.
Page 34, 3e ligne, même correction.
Page 50, 6e ligne à partir du bas, lire $-\, v^2 G''(v)$, au lieu de $+\, v^2 G''(v)$.
Page 102, 2e ligne, lire D et D′, au lieu de Δ et Δ'.
Page 112, lignes 8 et 9, lire $|\,\theta\,|$, au lieu de θ.
Page 114, dernière ligne, lire Log $|\,\varphi'(v)\,|$, au lieu de Log $\varphi'(v)$, et Log $|\,C\,|$, au lieu de Log C.
Page 137, 6e ligne, ajoutez : [Cf. Ch. XI, § 1].
Page 161, intervertir, sur la figure, les lettres T′ et (γ').
Page 201, 15e ligne, lire $= M \frac{\partial x}{\partial \mu} + \ldots$
Page 206, 7e ligne en remontant, lire : *rayon* (D′) *de* (K′).

TABLE DES MATIÈRES

LAVAL. — IMPRIMERIE L. BARNÉOUD ET Cie.

Date Due

OCT 1 [illegible]			